

# 1 Wechselstromwiderstände

## Wirkwiderstand

Ein *Wirkwiderstand* ist ein ohmscher Widerstand an einem Wechselstromkreis. Er lässt keine zeitliche Verzögerung zwischen Strom und Spannung entstehen, daher liegt keine Phasenverschiebung vor.

Der komplexe Widerstand (Impedanz) wird beschrieben mit:

$$Z = R + iX$$

wobei  $R$  der Wirkwiderstand und  $X$  der Blindwiderstand ist. Der komplexe Widerstand kann mit Hilfe eines Zeigerdiagramms dargestellt werden:



Wirkwiderstände sind *frequenzabhängig*. Ab  $1\text{kHz}$  steigt der Widerstand (*Skin-Effekt*). Durch die Wirbelströme im Inneren des Widerstandes kommt es zu einem veränderten Stromfluss am Rand des Widerstandes. Die dadurch resultierende Abnahme des Querschnittes führt zu einer Erhöhung des Widerstandes.

## Kapazitiver Widerstand

Ein *kapazitiver Widerstand* ist ein Widerstand, der durch den Einfluss eines Kondensators entsteht. Während der Kondensator im Gleichstromkreis als unendlich großer Widerstand wirkt, wirkt er im Wechselstromkreis als endlicher Widerstand, da er ständig geladen und entladen wird. Die Energie wird ohne Wirkung hin und her geschoben. Strom und Spannung sind phasenverschoben, wobei der Strom der Spannung um  $90^\circ$  vor läuft. Der kapazitive Widerstand kann mit Hilfe des ohmschen Gesetzes und den Effektivwerten von Strom und Spannung berechnet werden:

$$X_C = \frac{U_C}{I_C}$$

Der kapazitive Widerstand ist abhängig von der Kapazität des Kondensators (hoher Widerstand bei niedriger Kapazität) und von der Frequenz (hoher Widerstand bei niedriger Frequenz).

$$X_C = \frac{1}{i \cdot 2\pi f_C \cdot C} = \frac{1}{i\omega C}$$

## Induktiver Widerstand

Ein *induktiver Widerstand* ist ein Widerstand, der durch den Einfluss einer Spule entsteht. Durch den Wechselstrom baut die Spule ein magnetische Feld auf und ab. Durch Selbstinduktion sind Strom und

Spannung phasenverschoben, wobei der Strom der Spannung um  $90^\circ$  nach läuft.

$$X_L = \frac{U_L}{I_L}$$

Der induktive Widerstand ist abhängig von der Induktivität der Spule (hoher Widerstand bei hoher Induktivität) und von der Frequenz (hoher Widerstand bei hoher Frequenz).

$$X_L = i \cdot 2\pi f_L \cdot L = i\omega L$$

## 2 Schwingkreise

Ein elektrischer Schwingkreis ist eine resonanzfähige elektrische Schaltung aus Spule und Kondensator, die elektrische Schwingungen ausführt. Die Energie wird zwischen dem magnetischen Feld der Spule und dem elektrischen Feld des Kondensators ausgetauscht.

### Harmonischer Oszillator

Ein *harmonischer Oszillator* ist ein schwingungsfähiges System mit linearer Rückstellgröße (proportional zur Auslenkung entgegenwirkende Kraft). Der harmonische Oszillator kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Dabei bezeichnet  $x(t)$  die Auslenkung zu einem bestimmten Zeitpunkt und  $\omega_0$  die Eigenfrequenz des Systems.

Im Falle eines RLC-Schwingkreises ergibt sich:

$$U_L + U_C = 0$$

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$L \cdot \ddot{I} + \frac{Q}{C} = 0$$

### Freie gedämpfte elektrische Schwingung

Eine *freie gedämpfte Schwingung* ergibt sich aus einem schwingungsfähigem elektrischen System, welches einmal in Schwingung gebracht wurde, jedoch ohne äußere Einflüsse gedämpft ausschwingt. Dieses System kann allgemein durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$\ddot{x} + \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Im Falle eines RLC-Schwingkreises ergibt sich:

$$U_L + U_R + U_C = 0$$

$$L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} \cdot Q = 0$$

$$L \cdot \ddot{Q} + R \cdot \dot{Q} + \frac{1}{C} \cdot Q = 0$$

## Erzwungene Schwingung

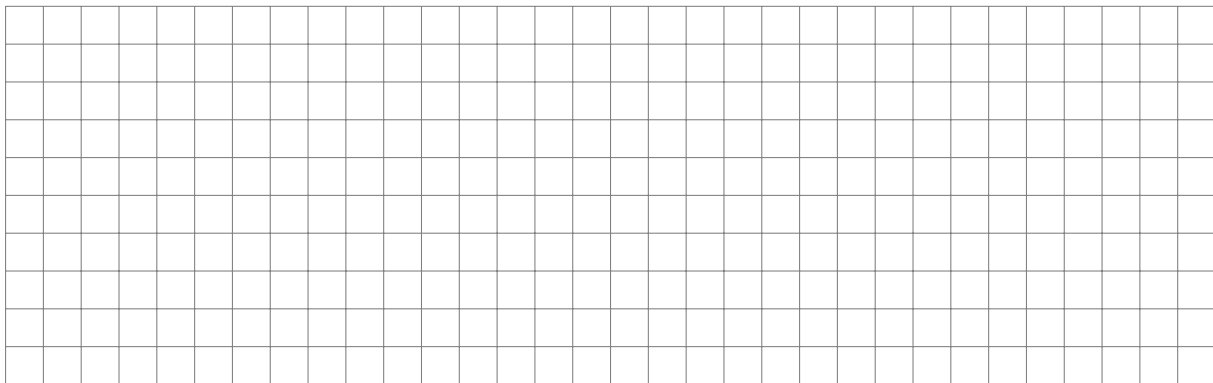
Eine *erzwungene Schwingung* entsteht durch eine zeitabhängige äußere Anregung. Abhängig von der Dämpfung stellt sich dabei nach einer gewissen Zeit eine stationäre erzwungene Schwingung ein.

## 3 Reihen- und Parallelschwingkreis

### Reihenschwingkreis

In einem *Reihenschwingkreis* sind Spule und Kondensator in Reihe geschaltet. Ein durch beide Komponenten fließender Wechselstrom erzeugt eine erzwungene Schwingung.

Reihenschwingkreis:



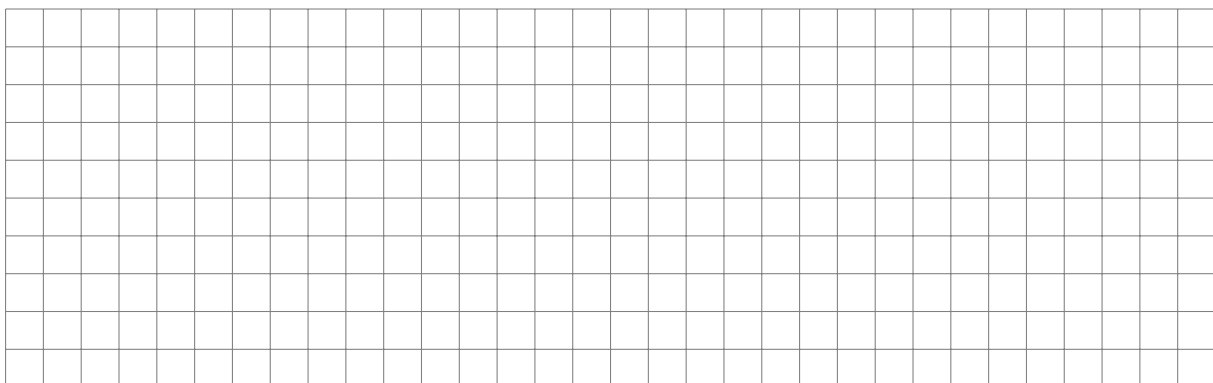
Im Resonanzfall heben sich die Spannungen im Reihenschwingkreis am Kondensator und an der Spule gegenseitig auf. Der Gesamtwiderstand ergibt sich nur durch den ohmschen Widerstand.

Während aufgrund der Reihenschaltung an Spule und Kondensator der gleiche Strom fließt, ist die Spannung phasenverschoben. Dies führt am Kondensator zu einer höheren Spannung, als der Gesamtspannung. Die *Spannungsüberhöhung* ist im Resonanzfall am größten.

### Parallelschwingkreis

In einem *Parallelschwingkreis* sind Spule und Kondensator in Serie geschaltet. Ein durch beide Komponenten fließender Wechselstrom erzeugt eine erzwungene Schwingung.

Parallelschwingkreis:



Im Resonanzfall heben sich die Spannungen im Parallelschwingkreis am Kondensator und an der Spule gegenseitig auf. Der Gesamtwiderstand ergibt sich nur durch den ohmschen Widerstand.

Während aufgrund der Parallelschaltung an Spule und Kondensator die gleiche Spannung anliegt, ist der Strom phasenverschoben. Dies führt zu *Resonanzüberhöhungen*.

## 4 Resonanz

### Resonanzfrequenz von RLC-Systemen

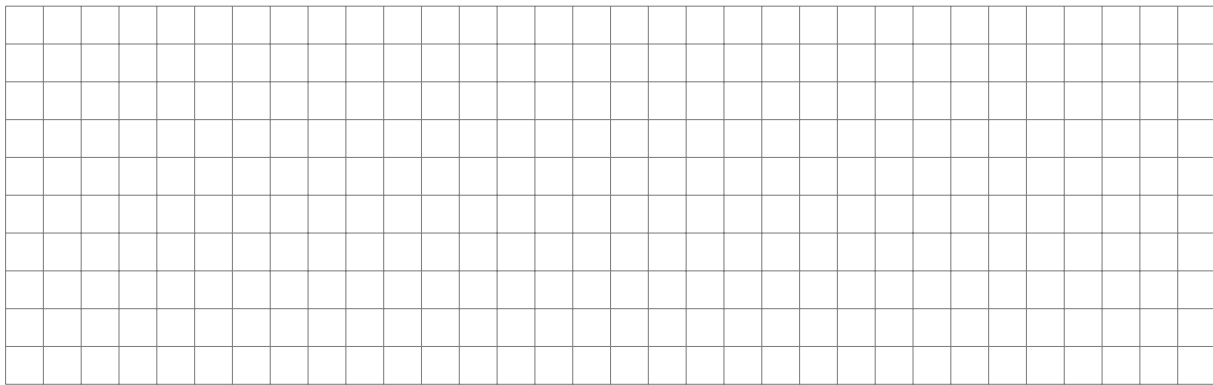
Im ungestörten Fall schwingen schwingungsfähige elektrische RCL-Systeme in der *Resonanzfrequenz*.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$f_0$  wird auch als *Thomsonsche Schwingungsgleichung* bezeichnet.

### Resonanzkurve

Die *Resonanzkurve* bildet den Amplitudengang des Schwingkreises ab:



### Halbwertsbreite und Gütefaktor

Die *Halbwertsbreite*  $\Delta f$  der Resonanz ist ein Bereich von Frequenzen um die Resonanzfrequenz. Dies betrifft alle Amplituden, die im Bereich von  $A^2 \geq \frac{1}{2}A_{res}^2$  liegen. Damit ergibt sich eine Halbwertsbreite von:

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{\delta}{\pi}$$

wobei  $\delta$  der Dämpfungskonstante entspricht.

Der *Gütefaktor* ergibt sich über den Kehrwert der Dämpfung:

$$Q = \frac{1}{d}$$

Damit lässt sich die Bandbreite auch über den Gütefaktor ausdrücken:

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q}$$

## 5 Ersatzschaltung

In einer *Ersatzschaltung für verlustbehaftete Induktivität bzw. Kapazität* werden alle im Schwingkreis wirkenden reellen Widerstände additiv zusammengefasst.

$$R_\sigma = R + R_L + R_C$$

Es wird dabei vorausgesetzt, dass  $R_\sigma$  aus einem Blindwiderstand ( $i\omega L$  bzw.  $-i\omega C$ ) und einem in Reihe geschalteten Verlustwiderstand ( $R_L$  bzw.  $R_C$ ) besteht.

Ersatzschaltbild für Spule und Kondensator:

