Inhaltsverzeichnis

Die Definitionen und Herleitungen entsprechen evtl. nicht in jedem Fall der nötigen mathematischen Strenge. Das Dokument ist lediglich als Überblick über die wichtigsten Inhalte des Moduls angedacht.

1 Allgemeine Formeln

Allgemein

$$f = \frac{1}{T}\ , \quad \omega = 2\pi f\ , \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$\omega^2 = \frac{k}{m}\ \text{(Feder)}\ , \quad \omega^2 = \frac{g}{l}\ \text{(Pendel)}$$
$$T_{trans} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2\ , \quad T_{rot} = \frac{1}{2} I_{ii} \omega^2$$
$$I = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 \quad \text{(Trägheitsmoment im Ursprung, Stäbe)}$$
$$\vec{p} = m\dot{r}\ , \quad \vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\ddot{r}$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\ , \quad \vec{M} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3\ , \quad A_O = 4\pi r^2\ , \quad A = 2\pi r^2$$

Eulersche Darstellung

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Schwerpunkt

$$\vec{R} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M}$$

Taylorentwicklung

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...$$

Vektoren

Kreuzprodukt und Rotation:

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \hat{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \hat{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad rot\, v = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \partial/\partial x & v_x \\ \hat{e}_y & \partial/\partial x & v_y \\ \hat{e}_z & \partial/\partial x & v_z \end{vmatrix}$$

BAC-CAB-Regel (Graßmann-Identität):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}$$

Koordinaten

Gradient Polarkoordinaten:

$$grad\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi$$

Ableitungen der polaren Einheitsvektoren:

$$\dot{\hat{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\hat{e}_r \quad \text{und} \quad \dot{\hat{e}}_r = \dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$$

Levi-Civita und Kronecker-Delta

Levi-Civita für Permutation von 123:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{zyklisch} \\ -1 & \text{antizklisch} \\ 0 & \text{sonstiges} \end{cases}$$

Kronecker-Delta für $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Rechenregeln

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ik}\delta_{ik}$$

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

Oft verwendete Integrale

$$\int \frac{\dot{f}(x)}{f(x)}\, dx = ln|f(x)| + C$$

$$\int \sin(ax)\cos(ax)\, dx = \frac{1}{2a}\sin^2(ax) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \sin^2(ax)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin(2ax) + C$$

$$\int \cos^2(ax)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin(2ax) + C$$

2 Newtonsche Axiome

2.1 Absoluter Raum und absolute Zeit

Nach Newton existiert ein *absoluter Raum* mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, er ist unabhängig vom (1) Beobachter und von den (2) darin enthaltenen Objekten.

Außerdem existiert eine *absolute Zeit* mit $t \in \mathbb{R}$, sie ist (1) gleichförmig und (2) ohne Beziehung auf äußere Gegenstände. Gleichzeitige Ereignisse sind möglich.

2.2 Newtonsche Axiome

1. Trägheitsgesetz

Es gibt Bezugssysteme, sogenannte Inertialsysteme (IS), in denen sich ein kräftefreier MP mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

2. Kraftgesetz

Die zeitliche Änderung des Impulses ist proportional zur Kraft.

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \dot{\vec{p}} = \vec{F} \qquad \vec{p} = m\vec{v} \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

3. Actio & Reactio

Die Summe aller Kräfte in einem abgeschlossenen System ist Null.

Für 2 MP gilt:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

4. Kräfteaddition

Kräfte (verschiedener Ursachen) addieren sich wie Vektoren.

2.3 Träge und schwere Masse

- **Träge Masse**: Widerstand gegen Änderungen der Geschwindigkeit
- **Passive schwere Masse**: Auf den Körper einwirkende Kraft durch Gravitationsfeld, proportional zu seiner Masse
- **Aktive schwere Masse**: Durch den Körper erzeugtes Gravitationsfeld, proportional zu seiner Masse

Nach Äquivalenzprinzip sind schwere Masse und träge Masse äquivalent.

2.4 Beispiele für Kräfte

Homogenes Schwerefeld

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$

Gravitationsgesetz

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r$$

Hookesches Gesetz

Das Hookesche Gesetz beschreibt elastisches Verhalten von Festkörpern. Für kleine Auslenkungen $\vec{r}_0$ gilt:

$$\vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r}_0) \; , \qquad r > 0$$

Reibungskräfte

Stokes: $\vec{F} = -\beta\dot{\vec{r}}$ $\quad\rightarrow$ Turbulente Strömung

Newton: $F = -\gamma \cdot |\dot{\vec{r}}| \cdot \dot{\vec{r}}$ $\quad\rightarrow$ Laminare Strömung

Lorenzkraft

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$$

2.5 Galileitransformation

Das Trägheitsgesetz $m\ddot{\vec{r}} = 0$ bleibt erhalten bei Galileitransformation.

1. Gleichförmig geradliniges bewegtes Bezugssystem: $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t$
2. Konstante Verschiebung der Zeit in Bezugssystem: $t = t' + t_0$
3. Anders, aber konstant orientiertes Bezugssystem: $\vec{r} = D\,\vec{r}_0$ (wobei D Drehmatrix)

Die Newtonsche Mechanik ist *zeitumkehrinvariant.*

2.6 Intertiale Bezugssysteme

Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem in dem sich ein kräftefreier MP mit $v = const.$ bewegt.

Im Inertialsystem gilt bzgl. des MP die Bewegungsgleichung:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

2.7 Nichtinertiale Bezugssysteme

Ein Nicht-Inertialsystem ist ein relativ zu einem Inertialsystem beschleunigtes Bezugssystem.

Es gibt MP mit Masse m. Vom Inertialsystem aus liegt MP bei $\vec{r'}$, vom Nicht-Inertialsystem aus bei $\vec{r}$. Beide Systeme liegen $\vec{R}$ auseinander. $\vec{r'}$ lässt sich somit beschreiben als $\vec{r'} = \vec{R} + \vec{r}$. Eine Komponente von $\vec{r}$ wird nach der Einsteinschen Summenkonvention als $x_i \hat{e}_i$ bezeichnet.

$$x'_i(t)\hat{e'}_i = R_i(t)\hat{e'}_i + x_i(t)\hat{e}_i(t)$$

$$\dot{x'}_i\hat{e'}_i = \dot{R}_i\hat{e'}_i + \dot{x}_i\hat{e}_i + x_i\dot{\hat{e}}_i$$

$$\ddot{x'}_i\hat{e'}_i = \ddot{R}_i\hat{e'}_i + \ddot{x}_i\hat{e}_i + 2\dot{x}_i\dot{\hat{e}}_i + x_i\ddot{\hat{e}}_i \qquad (*)$$

Die zeitlichen Ableitungen der Einheitsvektoren ergeben sich wie folgt:

$$\dot{\hat{e}}_i = \vec{\Omega} \times \hat{e}_i$$

$$\ddot{\hat{e}}_i = \dot{\vec{\Omega}} \times \hat{e}_i + \vec{\Omega} \times \dot{\hat{e}}_i = \dot{\vec{\Omega}} \times \hat{e}_i + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \hat{e}_i)$$

Eingesetzt in $(*)$ ergibt sich mit F_e (eingeprägte Kraft) und mit $\ddot{\vec{r'}} = \ddot{x}'\hat{e'}_i$:

$$m\ddot{\vec{r'}} = m\left[\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})\right] = \vec{F}_e$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_e - m\ddot{\vec{R}} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} + m\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}} + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} = \vec{F}_{eff}$$

Dabei werden alle Kräfte, die von der eingeprägten Kraft $\vec{F}_e$ subtrahiert werden als *Scheinkräfte* bzw. *Trägheitskräfte* bezeichnet. Bekannte Kräfte sind:

Corioliskraft

$$\vec{F}_C = 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega}$$

$$F_C = 2mv\omega$$

Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_Z = m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}$$
$$F_Z = m\omega^2 r$$

2.8 Gezeitenkraft

Gezeitenkräfte treten an ausgedehnten Himmelskörpern auf. Die Gezeitenkraft ergibt sich aus der Differenz der an beiden Seiten wirkenden Gravitationskraft und der gleichbleibenden Zentrifugalkraft. Auf der Innenseite des Körpers (zugewandt zum Körper, der das Gravitationsfeld erzeugt) ist die Gravitationskraft größer als die Zentrifugalkraft, was zu einer Ausdehnung führt. Auf der Außenseite ist die Gravitatioskraft geringer als die Zentrifugalkraft, was ebenfalls zu einer Ausdehnung führt.

Allgemein ergeben sich Gezeitenkräfte also durch das Zusammenspiel eines (1) inhomogenen Gravitationsfeldes und (2) Scheinkräften.

Im MMP der Erde gilt:

$$F_r = -\gamma \frac{mM}{r^2} + m\omega^2 r = 0$$

An den Außenpunkten gilt eine Differenz von:

$$a_r = \gamma M \left(-\frac{1}{(R \pm \rho)^2} + \frac{1}{R^2} \right) \approx 2\gamma M \frac{\rho}{R^3}$$

Dabei ist a_r die radiale Beschleunigung in den gegenüberliegenden Punkten auf der Oberfläche des Himmelskörpers (z.B. Erde). ρ ist der Radius des Himmelskörpers (z.B. Erde) und R der Abstand zwischen den Himmelskörpern (z.B. Erde-Mond).

Roche-Grenze

Werden die Gezeitenkräfte größer als die Gravitationskräfte, die den Körper zusammenhalten, so zerreißt der Körper. Diese Grenze zwischen den Kräften wird als *Roche-Grenze* bezeichnet.

$$F_G = \gamma \frac{m\mu}{r^2} \quad \text{(Gravitationskraft)}$$
$$F_T = \frac{2\gamma M \mu r}{d^3} \quad \text{(Gezeitenkraft)}$$

Dabei ist M eine Masse, der sich eine kleinere Masse m (mir Radius r) nähert. d ist der Abstand zwischen den beiden Körpern. Auf der Masse m wird außerdem eine sehr kleine Teilmasse μ betrachtet.

Durch Gleichsetzen der beiden Kräfte kann der *Roche-Radius* d_0 bestimmt werden.

$$d_0 = r \left(\frac{2M}{m} \right)^{1/3}$$

3 Ausgewählte Bewegungsgleichungen

Separatirix

Separatrizen geben allgemein die Grenzen von Systemen an. Im Falle des Phasenraumes trennt die Separatrix Gebiete mit finiter Bewegung (Oszillation) und Gebiete mit infiniter Bewegung.

Konservative Kräfte

Kräfte, welche vom Weg unabhängig sind, werden als *konservativ* bezeichnet. Die geleistete Arbeit ist nur vom Start- und Endpunkt abhängig. Eine Kraft ist konservativ, wenn gilt:

$$rot\,\vec{F} = 0$$

Potential

Ein *Potential* ist die Fähigkeit eines konservativen Feldes eine Arbeit zu verrichten. Dabei gilt folgender Zusammenhang:

$$\vec{F} = -grad\,U$$

3.1 Zentralkraftfelder

Zentralkräfte zeigen radial zum Kraftzentrum mit Inertialsystem im Zentrum. Für Zentralkraftfelder gilt:

$$\vec{r} \times \vec{F} = 0$$

Drehimpulserhaltung

Für Zentralkraftfelder gilt Drehimpulserhaltung.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = const.$$

Energie

Die Energie im Zentralkraftfeld ergibt sich durch:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = const.$$

$U(r)$ entspricht dem Potential, in welches $\frac{L^2}{2mr^2}$ effektiv mit einwirkt, sofern eine Drehbewegung mit Drehimpuls L vorliegt. U_{eff} ergibt sich entsprechend aus den beiden hinteren Termen:

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

3.2 Keplergesetze

1. Keplergesetz

Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.

$$0 < e < 1 : \quad U_{eff} < E < 0$$

2. Keplergesetz

Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen. Das 2. Keplergesetz folgt aus dem Drehimpulssatz $L = mr^2\dot{\varphi}$.

$$d\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r}$$

$$|\dot{\vec{A}}| = \left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{1}{2}r^2|\dot{\varphi}| = \frac{|L|}{2m} = const.$$

3. Keplergesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Bahnhalbachsen.

$$\frac{T^2}{a^3} = const.$$

Aus dem Flächensatz kann die Umlaufzeit bestimmt werden:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$$

Bewegungsgleichung

Brennpunktgleichung eines Kegelschnittes:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\varphi}$$

$$\text{mit} \quad \epsilon = \frac{e}{a} \quad \text{und} \quad p = \frac{b^2}{a}$$

In verschiedenen Fällen von ϵ ergeben sich unterschiedliche Schnitte:

$$\begin{array}{lll}
e = 0 : & E = U_{min}^{eff} & \text{(Kreis)} \\
0 < e < 1 : & U_{min}^{eff} < E < 0 & \text{(Ellipse)} \\
e = 1 : & E = 0 & \text{(Parabel)} \\
e > 1 : & 0 < E & \text{(Hyperbel)}
\end{array}$$

Für $E > 0$ ergibt sich eine *infinite Bewegung*.

Laplace-Lenz-Runge Vektor

Der *Laplace-Lenz-Runge-Vektor* ermöglicht die Herleitung der Bahnkurve $r(\varphi)$.

$$\vec{R} = \vec{v} \times \vec{L} - k\frac{\vec{r}}{r} = \vec{v} \times \vec{L} - k\hat{e}_r$$

Dabei ist $\vec{R}$ der Achsenvektor, welcher vom Brennpunkt zum nächstgelegenen Bahnpunkt zeigt. Er liegt damit parallel zur großen Halbachse.

3.3 Harmonische Schwingungen

Harmonische Schwingungen

$$\begin{array}{ll}
\ddot{x} + \omega^2 x = 0 & \text{(Harmonischer ungedämpfter Oszillator)} \\
\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0 & \text{(Harmonischer gedämpfter Oszillator)} \\
\ddot{x} + \omega^2 x = f\,\sin(\Omega t) & \text{(Harmonisch angeregter ungedämpfter Oszillator)} \\
\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = f\,\sin(\Omega t) & \text{(Harmonisch angeregter gedämpfter Oszillator)}
\end{array}$$

Lösen DGL 2. Ordnung

Am Beispiel: $\ddot{x} + \omega^2 x = f \sin(\Omega t)$

1. Homogene Lösung

Betrachten nur: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Ansatz: $x = e^{\lambda t}$, $\quad \ddot{x} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$

Ansatz in DGL einsetzen und λ bestimmen:

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \pm i\omega$$

Lösungsgleichung aufstellen:

$$\begin{aligned} x_h &= Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \\ &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \end{aligned}$$

2. Inhomogene Lösung

Funktionstyp des inhomogenen Teils allgemein nachbilden:

$$x = |D| \sin(\Omega t) = |D| \, e^{i(\Omega t)}$$

$$\ddot{x} = -\Omega^2 \, |D| \sin(\Omega t)$$

Ansatz in DGL einsetzen und Koeffizientenvergleich:

$$-\Omega^2 \, |D| \sin(\Omega t) + \omega^2 \, |D| \sin(\Omega t) = f \sin(\Omega t)$$

$$f = -\Omega^2 |D| + \omega^2 |D| = D(\omega^2 - \Omega^2)$$

$$\Rightarrow D = \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2}$$

D in Ansatz einsetzen:

$$x_s = \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t)$$

3. Gesamtlösung

Homogene und inhomogene Lösung addieren:

$$\begin{aligned} x &= x_h + x_s \\ &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + D \sin(\Omega t) \\ &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t) \end{aligned}$$

4. Anfangsbedingungen

Sind Anfangsbedingungen (AB) gegeben, so können auch die Koeffizienten A und B bestimmt werden.

Gekoppelte Federschwinger

Bei einem gekoppelten Federschwinger wird *für jede Masse* eine Differentialgleichung aufgestellt. Entsprechend ergibt sich ein System aus Differentialgleichungen.

Beispiel mit drei Federn und zwei Massen (k_1 m_1 k_2 m_2 k_3).
Dabei befinde sich m_1 am Punkt x_1 und m_2 am Punkt x_2.

(1) Für jedes m wird jeweils die Feder rechts und links von der Masse betrachtet. Die linke Feder wird negativ eingetragen, die rechte Feder positiv.

(2) Zu jeder Feder wird neben der entsprechenden Federkonstante k_i auch die Position $x_i - x_j$ angegeben. Dabei ist x_i der rechte x-Wert, x_j entspricht dem linken x-Wert. Ein Fixpunkt wird mit $x_i = 0$ angegeben.

Daraus lassen sich für den obigen Fall die DGLen aufstellen:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - 0) + k_2(x_2 - x_1)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) + k_3(0 - x_2)$$

Dämpfung

- Unterdämpfter Fall (Schwingfall) mit $\omega^2 - \beta^2 > 0$
- Überdämpfter Fall (Kriechfall) mit $\beta^2 - \omega^2 > 0$
- Kritisch gedämpfter Fall (Aperiodischer Grenzfall) mit $\omega = \beta$

Amplitudenresonanz

Im gedämpften Fall liegt die Amplitude einer angeregten Schwingung bei:

$$D = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

Die Amplitude wird maximal, wenn der Radikand minimal wird:

$$R = (\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2 = min!$$
$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = -2(\omega^2 - \Omega^2)2\Omega + 8\beta^2\Omega = 0$$
$$\Rightarrow\ \Omega_{res}^2 = \omega^2 - 2\beta^2 > 0$$

$\Rightarrow$ Nur im stark unterdämpften Fall kommt es zu Resonanz.

Dissipierte Leistung

Im eingeschwungenen Zustand schwingt das System (Harmonisch angeregte Schwingung mit Dämpfung) nur noch mit der speziellen Lösung $|D|\ \sin(\Omega t + \delta)$.

Es kann folgende Energiebilanz aufgestellt werden:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) + \rho\dot{x}^2 = F\ \sin(\Omega t) \cdot \dot{x}$$

Dabei entspricht der vordere Term der mechanischen Energie, welche sich (kinetisch und potentiell) im Verlauf gegenseitig austauscht und im zeitlichen Mittel konstant bleibt.

$\rho\dot{x}^2$ entspricht der *dissipierten Leistung* (Reibung). Dabei ist:

$$\rho = 2\beta m$$

$F\,\sin(\Omega t)\cdot\dot{x}$ entspricht der *eingespeisten Leistung*. Dabei ist:

$$F = fm$$

Die über eine Periode ($T = {}^{2\pi}/_{\Omega}$) gemittelte dissipierte Leistung ergibt sich mit:

$$\begin{aligned} x &= |D|\,\sin(\Omega t + \delta) \\ \dot{x} &= |D|\,\Omega\,\cos(\Omega t + \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T \rho\dot{x}^2\,dt \\ &= \rho\,\frac{1}{T}\int_0^T |D|^2\,\Omega^2\,\cos^2(\Omega t + \delta)\,dt \\ &= |D|^2\,\Omega^2\,\rho\,\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\Omega t + \delta)\,dt \qquad \text{mit } \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\Omega t + \delta)\,dt = \frac{1}{2} \\ &= |D|^2\,\Omega^2\,\rho\,\frac{1}{2} \qquad \text{mit } \rho = 2\beta m \\ &= |D|^2\,\Omega^2\,\beta m \\ &= \frac{f^2\Omega^2}{(\omega^2-\Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}\,\beta m \end{aligned}$$

Parametrische Resonanz

Während bei schwingenden Systeme bisher ausschließlich die Anregung durch zeitabhängige Kräfte betrachtet wurde, können Systeme auch durch zeitabhängige Änderungen der Parameter des Systems angeregt werden (z.B. Schaukel). Die Eigenfrequenz wird zeitabhängig.

$$\ddot{q} + \omega^2(t)\,q = 0 \quad \text{mit} \quad \omega(t) = \omega(t+T)$$

Beispiel: Schaukel

Bei der Schaukel verändert sich die Pendellänge zeitabhängig. Damit wird die stabile Gleichgewichtslage ($\varphi = 0$) instabil. Es gilt:

$$l(t) = l_0(1 + \epsilon\,\cos(\Omega t))$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l(t)}\varphi = 0$$

4 Systeme freier Massenpunkte

4.1 Erhaltungssätze

Ein *Erhaltungssatz* formuliert die Tatsache, dass sich eine Größe (*Erhaltungsgröße*) in bestimmten physikalischen Prozessen nicht ändert. Es gibt 10 Erhaltungssätze:

- (3) Impuls: $\vec{P} = const.$
- (3) Drehimpuls: $\vec{L} = const.$

- (1) Energie: $E = const.$
- (3) Bewegung: $\vec{R} = \vec{v}_0 t + \vec{R}_0$
  $\rightarrow$ Die Bahn des Schwerpunktes ist eine Gerade, die sich zeitlich nicht ändert.

Impuls

Für abgeschlossene Systeme ($\vec{F} = 0$) bleibt der Gesamtimpuls erhalten (z.B. Rakete).

$$\dot{\vec{P}} = \sum_\alpha \dot{\vec{p}}_\alpha = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha = \vec{F}$$

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} = 0\ , \quad \vec{p} = const.$$

Drehimpuls

Für abgeschlossene Systeme ($F_\alpha^a = 0$) bleibt der Gesamtdrehimpuls erhalten (z.B. ∼Sonnensystem).

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= \sum_\alpha \dot{\vec{L}}_\alpha = \sum_\alpha (\vec{v}_\alpha \times \vec{p}_\alpha) \\
&= \sum_\alpha \left(\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^a\right) + \sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \left(\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta}\right) \\
&= \sum_\alpha \left(\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^a\right)\ , \quad \text{da } \vec{F}_{\alpha\beta} = 0 \\
&= 0\ , \quad \text{sofern } \vec{F}_\alpha^a = 0 \quad \text{(Abgeschlossenes System)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = const.$$

Beispiel: $\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = 0$

Energie

$$E = T + U = const.$$

- *Kinetische Energie*

$$T = \sum_\alpha T_\alpha = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}^2$$

- *Potentielle Energie*

$$\begin{aligned}
U &= \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \\
&= \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^a \dot{\vec{r}}_\alpha + \sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\alpha\beta} \dot{\vec{r}}_\alpha \\
&= \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^a \dot{\vec{r}}_\alpha + \sum_{\alpha < \beta} \vec{F}_{\alpha\beta} \dot{\vec{r}}_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

Beispiel: $\vec{F}_{12} \dot{\vec{r}}_1 + \vec{F}_{21} \dot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} \dot{\vec{r}}_{12}$

- *Äußere Kräfte*

Falls ein Potential existiert gilt:

$$U_\alpha^a = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_\alpha} \vec{F}_\alpha^a(\vec{r})\, d\vec{r}$$

- *Innere Kräfte*

Falls ein Potential existiert gilt:

$$U_{\alpha\beta}(\rho) = -\int_{\rho_0}^{\rho} f_{\alpha\beta}(\rho')\, d\vec{\rho'} = U_{\beta\alpha}(\rho)$$

4.2 Virialsatz

Der *Virialsatz* gibt einen Zusammenhang zwischen dem zeitlichen Mittel der kinetischen Energie und dem zeitlichen Mittel der potentiellen Energie an. Eine Hilfsgröße G gibt die Summe der Positionen und Impulse aller n Teilchen an.

$$G = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha \vec{r}_\alpha$$

$$\dot{G} = \sum_\alpha \dot{\vec{p}}_\alpha \vec{r}_\alpha + \sum_\alpha \vec{p}_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \vec{F}_\alpha \vec{r}_\alpha + 2T$$

Im zeitlichen Mittel geht $\dot{G}$ gegen 0 (für finite Bewegungen). Durch umstellen ergibt sich:

$$0 = \vec{F}_\alpha \vec{r}_\alpha + 2\bar{T}$$

$$\bar{T} = -\frac{1}{2}\vec{F}_\alpha \vec{r}_\alpha = -\frac{1}{2}\sum_\alpha \overline{\vec{F}_\alpha \vec{r}_\alpha}$$

Für den Zusammenhang gilt:

$$\bar{T} = \frac{n+1}{2}\bar{U}$$

Beispiele:

$n = 1$	Harmonischer Oszillator	$\bar{T} = \bar{U}$
$n = -2$	Keplerproblem	$\bar{T} = -\frac{1}{2}\bar{U}$

4.3 Zweikörperproblem/Keplerproblem

Beim *Zweikörperproblem* (auch *Keplerproblem*) wird das Bezugssystem in den MMP gelegt (Schwerpunkt, siehe Abschnitt 1):

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r'}_1 + m_2 \vec{r'}_2}{M} = 0$$

4.4 Dreikörperproblem

Das *Dreikörperproblem* ist nur für Spezialfälle lösbar:

- Kollineare Bewegung (Euler)
  → Drei Massen bewegen sich auf einer Geraden, erfüllt wenn: $\vec{r}_3 - \vec{r}_2 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$
- Gleichseitiges Dreieck (Lagrange)
  → Drei Massen bewegen sich auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks

- Eingeschränktes Dreikörperproblem
  → Falls $m_3 \ll m, M$, so kann m_3 auf sog. *Lagrangepunkten* L_1 bis L_5 liegen
- Choreografische Trajektorien
  → 3 Massen bewegen sich auf achtförmiger Bahn in der Ebene mit MMP im Kreuzungspunkt der 8

4.5 Mehrkörperproblem

Für mehr als drei Körper wird es auf Grund der Freiheitsgrade sehr schwer Bewegungsgleichungen anzugeben.

Die Erhaltungssätze liefern 10 unabhängige Bewegungsintegrale. Pro Bewegungsintegral kann eine Variable eliminiert werden. Für N-Körper in $d = 3$ Dimensionen bedeutet das $2d \cdot N - 10$ Freiheitsgrade im Phasenraum.

Beispiele

2-Körper: $f = 6 \cdot 2 - 10 = 12 - 10 = 2$
3-Körper: $f = 6 \cdot 3 - 10 = 18 - 10 = 8$
4-Körper: $f = 6 \cdot 4 - 10 = 24 - 10 = 14$
etc.

4.6 Elastische Stöße

Betrachtet wird eine bewegte Masse m_1 mit Geschwindigkeit (Laborsystem) mit $\vec{u}_1$, die eine ruhende Masse m_2 mit $\vec{u}_2$ stößt. Im Schwerpunktsystem bewegen sich die Massen mit $\vec{u'}_1$ und $\vec{u'}_2$. Nach dem Stoß bewegen sich die Massen mit $\vec{v}_i$ bzw. $\vec{v'}_i$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \vec{u'}_i & & \vec{v'}_i & & \\
E & = & \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{u'}_i^{\,2} & = & \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v'}_i^{\,2} & & \\
p & = & \sum_i m_i \vec{u'}_i & = & \sum_i m_i \vec{v'}_i & = 0 &
\end{array}
$$

Folgende Zusammenhänge gelten:

$$\vec{u'}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\,\vec{u'}_2 \,, \quad \vec{v'}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\,\vec{v'}_2$$

$$\vec{u'}_i^{\,2} = \vec{v}_i^{\,2}$$

Für den Zentralstoß gilt:

$$\vec{u'}_1 = -\vec{v'}_1$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v'}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v} + \vec{v'}_2 = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{u}_1$$

5 Eingeschränkte Bewegungen

5.1 Bindungen, Freiheitsgrade und verallgemeinerte Koordinaten

Bindung

Eine *Bindung* ist ein Verbund von zwei oder mehreren Körpern. Die Freiheitsgrade der Körper werden durch die Bindung eingeschränkt. Es ergeben sich abhängige Koordinaten, weshalb newtonsche Bewegungsgleichungen nicht zur Beschreibung ausreichen.

Bindungen werden durch *Zwangskräfte* erzeugt. Diese sind jedoch nicht von vorne herein bekannt.

- Rheonome Bindung (Fließend) → Explizit zeitabhängige Bindung
- Skleronome Bindung (Starr) → Explizit zeitunabhängige Bindung
- Holonome Bindung → System lässt sich durch n generalisierte Koordinaten beschreiben
- Anholonome Bindung → Zwangsbedingungen, die keine Freiheitsgrade einschränken (z.B. in Kugel eingeschlossener MP)

Freiheitsgrade und verallgemeinerte Koordinaten

Freiheitsgrade geben die minimale Anzahl von Variablen an, die ein System vollständig beschreiben. Das entspricht der Anzahl der kartesischen Koordinaten abzüglich der holonomen Bindungen.

Die Freiheitsgrade f lassen sich berechnen aus der Dimension d, der Anzahl der Körper N und der Anzahl der holonomen Bindungen b.

$$f = d \cdot N - b$$

Diese minimale Anzahl an Variablen wird als *verallgemeinerte Koordinaten* bezeichnet.

5.2 Das d'Alembertsche Prinzip

Prinzip der virtuellen Arbeit

Die *virtuelle Arbeit* δW bezeichnet die Arbeit, die eine Kraft an einem System bei *virtueller Verrückung* $\delta\vec{r}$ verrichtet. Die virtuelle Verrückung ist eine mit den (1) Zwangsbedingungen verträgliche (2) fiktive (3) infinitesimale Verschiebung.

Im *Gleichgewicht* ist die Summe aller von den Zwangskräften verrichtete Arbeit Null.

$$\sum_\alpha F_\alpha^z \delta x_\alpha = 0$$

d'Alembertsche Prinzip

Die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet.

Nach Newton ist $m_\alpha \ddot{r}_\alpha = F_\alpha$ und somit $m_\alpha \ddot{r}_\alpha - F_\alpha = 0$. Dabei entspricht F_α der effektiven Kraft, welche sich aus eingeprägter Kraft F_α^e und Zwangskraft F_α^z zusammensetzt. Mit dem d'Alembertschen Prinzip gilt nun:

$$\sum_\alpha \left(m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha - \vec{F}_\alpha^{eff} \right) \delta\vec{r}_\alpha = \sum_\alpha \left(m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha - \vec{F}_\alpha^e - \vec{F}_\alpha^z \right) \delta\vec{r}_\alpha = \sum_\alpha \left(m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha - \vec{F}_\alpha^e - 0 \right) \delta\vec{r}_\alpha = 0$$

Das *d'Alembertsche Prinzip* ermöglicht nun die Aufstellung einer *Bewegungsgleichung* eines Systems mit *Zwangskräften*.

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}$$

$$\vec{Z}\,\delta\vec{r} = (m\ddot{\vec{r}} - \vec{F})\,\delta\vec{r} = 0$$

Allgemein:

$$\delta W = \sum_\alpha \vec{Z}_\alpha\,\delta\vec{r}_\alpha = \sum_\alpha \left(m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha - \vec{F}_\alpha \right) \delta\vec{r}_\alpha = 0$$

Berechnung

1. Zwangsbedingung aufstellen
   $\rightarrow$ Übliche Ansätze: $\tan\varphi = \frac{y}{x}$, $z = r\varphi$ oder $x^2 + y^2 = l^2$
2. Virtuelle Verrückung formulieren
   $\rightarrow$ Ansatz z.B.: $x = r\,\sin\varphi \rightarrow\ \frac{\delta x}{\delta\varphi} = r\,\cos\varphi \Rightarrow \delta x = r\,\cos\varphi\,\delta\varphi$
3. Eingeprägte Kraft bestimmen
   $\rightarrow$ Ansatz für radiale Systeme: $\vec{r} = r\,\hat{e}_r$
   $\rightarrow$ Ansatz für Systeme im Schwerefeld: $-g\,\hat{e}_z$
4. Integrieren oder DGL lösen
5. Anfangsbedingung einsetzen

5.3 Lagrange 1. Art

Langrange 1. Art eignet sich zur expliziten Berechnung der Zwangskräfte. Für die Nebenbedingung g_α muss die virtuelle Verrückung gelten:

$$grad\,g_\alpha \cdot \delta r = 0$$

Werden die Nebenbedingungen jeweils mit einem *Lagrange Multiplikator* λ_α versehen und addiert, so ergibt sich direkt die Zwangskraft.

$$Z_i = \sum_{\alpha=1}^{b} \lambda_\alpha\, grad\, g_\alpha$$

Somit ergibt sich die *Lagrange-Gleichung 1. Art*.

$$m_i\ddot{x}_i = F_i + Z_i = F_i + \sum_{\alpha=1}^{b} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i}$$

Wobei b der Anzahl der holonomen Bindungen entspricht.

Berechnung

1. Koordinatensystem einführen
2. Zwangsbedingung formulieren
3. Lagrange 1. Art in Komponenten aufschreiben
   $\rightarrow m\ddot{x} = ...,\ m\ddot{y} = ...$, etc.
4. Nebenbedingungen g_α 2 mal nach der Zeit differenzieren
   $\rightarrow \ddot{g}_\alpha(\ddot{x}),\ \ddot{g}_\alpha(\ddot{y})$, etc.
5. Komponenten aus (3) in differenzierte Nebenbedingungen aus (4) einsetzen
6. Lagrange-Multiplikatoren bestimmen
7. Bewegungsgleichung aufstellen

5.4 Lagrange 2. Art

Bei *Lagrange 2. Art* werden nur so viele Bewegungsgleichungen aufgestellt, wie das System Freiheitsgrade besitzt. Damit werden Zwangskräfte und Nebenbedingungen eliminiert. Kurz: Die Eliminierung der b unabhängigen

Koordinaten führt vom d'Almbertschen Prinzip auf Lagrange 2. Art.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Mit der *Lagrange-Funktion*:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}xq^2$$

Berechnung

1. Verallgemeinerte Koordinaten aufstellen
2. T, U und somit L bestimmen
3. Lagrange-Gleichung 2. Art je Koordinate aufstellen
4. Bewegungsgleichungen bestimmen

5.5 Hamiltonprinzip

Variationsrechnung

In der Variationsrechnung wird eine Funktion $y(x)$ so bestimmt, dass J extrem wird:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x), x\right] dx = extr.$$

Für alle anderen Bahn-Varianten wird J entsprechend kleiner oder größer, d.h. $y(x)$ hat dann die Form:

$$y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\eta(x)$$

wobei $y(x,0)$ der Lösung entspricht, α ein Parameter ist und $\eta(x)$ eine beliebige differenzierbare Funktion ist. Eingesetzt in das Integral ergibt sich:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x\right] = extr. \quad \text{für } \alpha = 0$$

$$\text{Daher gilt: } \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial y}\right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta\right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta\right) dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\eta\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta\, dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta\right) dx + 0 - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta\, dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta\, dx
\end{aligned}$$

Damit muss der innere Teil Null werden. Der folgende Ausdruck entspricht der *Eulerschen Gleichung*:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Hamiltonprinzip

Das System verfolgt zwischen zwei Punkten im Konfigurationsraum den Weg, der für ein festes Zeitintervall die Wirkung S stationär macht.

Die Langrange-Gleichung 2. Art entspricht der Eulerschen Gleichung für die Variationsaufgabe. Dabei hat $[S] = [L] \times [t]$ die Einheit "Wirkung", also "Zeit" mal "Energie":

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(\{q_i, \dot{q}_i\}, t\right) dt = \text{stationär}$$

Legendre-Transformation

Die *Legendre-Tranformsation* überführt eine Funktionen $f(x)$ in einem linearen Raum auf eine Funktionen $g(u)$ in einem dualen Raum ab. Die Variable u ist dabei eine Ableitung von $f(x)$.

$$\text{Für} \quad u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{gilt} \quad g(u) = \pm\Big[u\, x(u) - f(x(u))\Big] = \pm(u\, x - f)$$

Hamiltonfunktion

Die *Hamiltonfunktion* entspricht im Falle skleronomer Zwangsbedingungen der Energie eines Systems als Funktion des Phasenraumes. Sie leitet sich von einer Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion ab.

Das totale Differential der Lagrange-Funktion führt auf:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_i}\, dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\, dt$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = \dot{p}_i \cdot \dot{q}_i + p_i \cdot \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

t soll L invariant lassen (explizit zeitunabhängig), daher wird:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

und somit:

$$\frac{dL}{dt} = \dot{p}_i \cdot \dot{q}_i + p_i \cdot \ddot{q}_i + 0 = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \cdot p_i\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \cdot p_i\right) - \frac{dL}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \cdot p_i - L\right) = 0$$

Das Innere der Ableitung wird als *Hamiltonfunktion* H bezeichnet.

$$H = \dot{q}_i p_i - L = const.$$

5.6 Erhaltungssätze

Homogenität der Zeit (Energieerhaltung)

Die Energieerhaltung folgt aus dem *Eulertheorem*:

$$\dot{q}_i p_i = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i \frac{\partial \left[T(\dot{q}_i) - U(q_i)\right]}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i \frac{\partial (\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2)}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i \cdot m \dot{q}_i = m \dot{q}_i^2 = 2T$$

Eingesetzt in die Hamiltonfunktion ergibt sich:

$$H = \dot{q}_i p_i - L = 2T - (T - U) = T + U = E = const.$$

Homogenität des Raumes (Impulserhaltung)

Eine infinitesimale Änderung des Raumes $\delta \vec{r} = const.$ soll L invariant lassen.

$$\delta L = L(\vec{r}_\alpha + \delta \vec{r}) - L(\vec{r}_\alpha) = \left(\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\alpha} \right) \delta \vec{r}_\alpha = \left(\sum_\alpha \dot{\vec{p}}_\alpha \right) \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

Da $\delta \vec{r} \neq 0$ muss gelten:

$$\sum_\alpha \dot{\vec{p}}_\alpha = \dot{\vec{P}} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{P} = const.$$

Isotropie des Raumes (Drehimpulserhaltung)

Eine infinitesimale Drehung des Koordinatensystems $\delta \vec{r} = \delta \vec{\vartheta} \times \vec{r}$ soll L invariant lassen. Die Änderung ergibt abgeleitet:

$$\delta \dot{\vec{r}} = \delta \dot{\vec{\vartheta}} \times \vec{r} + \delta \vec{\vartheta} \times \dot{\vec{r}} = 0 + \delta \vec{\vartheta} \times \dot{\vec{r}} = \delta \vec{\vartheta} \times \dot{\vec{r}}$$

Es ergibt sich:

$$\delta L = \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\alpha} \delta \vec{r}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha} \delta \dot{\vec{r}}_\alpha \right) = \sum_\alpha \left(\dot{\vec{p}}_\alpha \, (\delta \vec{\vartheta} \times \vec{r}) + \vec{p}_\alpha \, (\delta \vec{\vartheta} \times \dot{\vec{r}}) \right) = \delta \vec{\vartheta} \cdot \sum_\alpha \left(\vec{r} \times \dot{\vec{p}}_\alpha + \dot{\vec{r}} \times \vec{p}_\alpha \right) = 0$$

Da $\delta \vec{\vartheta} \neq 0$ muss gelten:

$$\sum_\alpha \left(\vec{r} \times \dot{\vec{p}}_\alpha + \dot{\vec{r}} \times \vec{p}_\alpha \right) = \sum_\alpha \frac{d}{dt} (\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha) = \sum_\alpha \dot{\vec{L}}_\alpha = \dot{\vec{L}} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{L} = const.$$

5.7 Noether-Theorem

Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße.

Bleiben die Eigenschaften eines Systems nach einer Transformation (z.B. Drehung oder Verschiebung) erhalten, so ist das System *symmetrisch* und es gibt bezüglich dieser Transformation eine Erhaltungsgröße. Das Noether-Theorem gilt für alle Systeme, für die eine Bewegungsgleichung aus dem Variationsprinzip abgeleitet werden kann. Die Variation des Wirkungsintegrals (Lagrangefunktion) muss verschwinden.

Ist L invariant unter der Transformation $q_i(t) \longrightarrow q_i(t, \alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h.

$$L(\{q_i(t, \alpha),\, \dot{q}_i(t, \alpha)\},\, t) = L(\{q_i(t),\, \dot{q}_i(t)\},\, t)$$

$$\text{dann ist:} \quad \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0} = const. \quad \text{bzgl. } t$$

5.8 Hamiltonformalismus

Hamiltonsche kanonische Gleichung

Die *Hamiltonschen kanonischen Gleichungen* sind die Bewegungsgleichungen eines Systems, welches durch die Hamilton-Funktion beschrieben wird.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Sie ergeben sich mit der Hamiltonfunktion in der Form $H(q,p,t) = \dot{q}_i(q,p,t)\, p_i - L(q, \dot{q}(q,p,t), t)$ über:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} p_k + \dot{q}_i - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} p_k - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = -\dot{p}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial t} p_k - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen sind äquivalent zu Langrange 2. Art:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Liouville-Theorem

Das von benachbarten Trajektorien eingeschlossene Volumen im Phasenraum ist konstant.

Die Hamiltonschen Gleichungen beschreiben den Fluss im Phasenraum, welcher das Volumen im Phasenraum konstant lässt. Für eine Hamiltonsche Bewegungsgleichung $\vec{x} = (\vec{q}, \vec{p})$ ergibt sich die Ableitung:

$$\dot{\vec{x}} = (\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}}) = \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}\right)$$

Auf das Geschwindigkeitsfeld wird die Divergenz angewendet:

$$div\ \dot{\vec{x}} = div\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \vec{q}\, \partial \vec{p}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{p}\, \partial \vec{q}}\right) = 0 \qquad \text{mit} \quad div := \left(\frac{\partial}{\partial \vec{q}} + \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right)$$

Ist die Divergenz Null, so ist das Geschwindigkeitsfeld $\dot{x}$ quellenfrei. Das Phasenraumvolumen muss dann konstant sein.

Poisson-Klammern

Seien u, v beliebige differenzierbare Funktionen der $2f$ kanonischen Koordinaten $\{q_i\}$ und Impulse $\{p_i\}$, dann ist die *Poisson-Klammer* wie folgt definiert:

$$\{u, v\} = \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i} - \frac{\partial v}{\partial p_i}\frac{\partial u}{\partial q_i}$$

Es gelten folgende Rechengesetze:

$$\{u, v\} = -\{v, u\}$$
$$\{u, const.\} = 0$$
$$\{u_1 + u_2, v\} = \{u_1, v\} + \{u_2, v\}$$
$$\{u_1 u_2, v\} = u_1 \{u_2, v\} + u_2 \{u_1, v\}$$
$$\{u, \{v, w\}\} + \{w, \{u, v\}\} + \{v, \{w, u\}\} = 0$$

6 Starre Körper

Ein starrer Körper ist ein System von Massepunkten (MP), deren gegenseitige auch unter Einwirkung äußerer Kräfte gleich bleibt. Ein starrer Körper besitzt 6 Freiheitsgrade, 3 *Translationsfreiheitsgrade* und 3 *Rotationsfreiheitsgrade*. Die Anzahl der Freiheitsgrade können sich bei Bindungen reduzieren.

$$f = 6 - b$$

Dabei ist b die Anzahl der Bindungen.

6.1 Kinetische Energie, Drehimpuls und Trägheitstensor

Die kinetische Energie T und der Drehimpuls $\vec{L}$ trennen sich in Anteile, die *Translation* und *Rotation* beschreiben.

$$T = T_{trans} + T_{rot} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} I_{ii}\omega^2$$
$$\vec{L} = \vec{L}_{trans} + \vec{L}_{rot} = \vec{r} \times \vec{p} + I\vec{\omega}$$

Dabei ist I_{ii} der *Trägheitsmoment* bzgl. einer Achse (z.B. ist I_{zz} der Trägheitsmoment bzgl. der z-Achse) und I der *Trägheitstensor*. Mit diesem kann das Trägheitsmoment für jede beliebige Achse durch den Schwerpunkt berechnet werden.

Berechnung der Trägheitsmomente

Beispiel für Drehung um x-Achse (analog um andere Achsen):

$$I_{xx} = \iiint_K \rho \cdot r^2 \, dV = \iiint_K \rho \, (y^2 + z^2) \, dV$$

Hauptträgheitsmoment

Je nach gewählter Achse variiert das Trägheitsmoment bei einem beliebig geformten Körper bei der der Drehung. Zwei senkrecht aufeinander stehende Achsen sind jedoch immer maximal bzw. minimal bzgl. des Trägheitsmomentes, diese werden als *Hauptträgheitsachsen* bezeichnet. Der Trägheitstensor ist in diesem System *diagonal*. Die Eigenwerte dieses Trägheitstensors werden als *Hauptträgheitsmomente* bezeichnet.

In symmetrischen Körpern sind die Hauptträgheitsmomente sehr leicht zu bestimmen.

6.2 Steinerscher Satz

Mit dem *Steinerschen Satz* lassen sich Trägheitsmomentes eines starren Körpers für parallel verschobene Drehachsen bestimmen. Dabei gilt:

$$I'_{ij} = I_{ij} + md^2$$

I ist Trägheitsmoment im Schwerpunkt, m die Masse und d die Länge der Verschiebung. Die verallgemeinerte Variante lautet:

$$I'_{ij} = I_{ij} + M(\delta_{ij}\vec{a}^2 - a_i a_j)$$

Dabei ist $\vec{a}$ der Verschiebungsvektor vom Trägheitsmoment am Schwerpunkt I_{ij}, zum Trägheitsmoment am gewählten Punkt I'_{ij}.

6.3 Bewegungsgleichungen

Eulergleichungen

Die *Eulerschen Gleichungen* sind Bewegungsgleichungen für die Rotation eines starren Körpers.

$$M_i = \dot{L}_i + \epsilon_{ijk}\,\omega_j\,L_k$$
$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} + (\vec{\omega} \times \vec{L})$$

Dabei ist M die Summe aller von außen auf den Körper wirkenden Drehmomente, L der Drehimpuls und ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers.

Eulerwinkel

Die *Eulerwinkel* sind drei unabhängige Parameter mit denen die Orientierung eines starren Körpers beschrieben werden kann. Mit den Eulerwinkeln können Koordinaten (Ortsvektor zu einem Punkt auf dem Körper) bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems in die Koordinaten eines anderen kartesischen Koordinatensystems umgerechnet werden.

Dabei wird eine Drehmatrix verwendet. Die Drehung verläuft in drei Schritten mit den Eulerwinkeln.

$$\omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$
$$\omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$
$$\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

Dabei gilt für die Energie:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$
$$\text{mit} \quad \omega_{1,2,3}(q_i, \dot{q}_i) = \omega_{1,2,3}(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$$

6.4 Anwendungen

Kreiseltheorie

Ein Kreisel ist ein starrer Körper, welcher an einem Punkt festgehalten wird. Es können verschiedene Typen unterschieden werden:

$I_1 = I_2 = I_3 :$ Kugelkreisel (z.B. Würfel, Kugle)

$I_1 = I_2 \lesseqgtr I_3 :$ Symmetrischer Kreisel (z.B. Zigarre, Diskus)

$I_1 \neq I_2 \neq I_3 :$ Unsymmetrischer Kreisel

Freier Kreisel: Der Drehmoment ist Null $\vec{M} = 0$, damit $\vec{L} = const$. Der freie Kreisel ist im MMP unterstützt (im homogenen Schwerefeld).

Schwerer Kreisel: Der Drehmoment ist ungleich Null $\vec{M} \neq 0$, damit $\vec{L} \neq const$. Der schwere Kreisel ist im MMP nicht unterstützt (im homogenen Schwerefeld).

7 Kanonische Transformation

Wenn bei einer Koordinatentransformation im Phasenraum die hamiltonschen Gleichungen invariant bleiben, so wird diese Koordinatentransformation als *kanonische Transformation* (der "Regel" folgend) bezeichnet.

Bei einer kanonischen Transformation soll die Hamilton-Funktion möglichst vereinfacht werden. Zur Konstruktion können *erzeugende Funktionen* $F_i(q, Q, t)$ verwendet werden.

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

In den transformierten Koordinaten muss H' die kanonischen Gleichungen (siehe Abschnitt 5.8) erfüllen.