Inhaltsverzeichnis

Die Sätze und Definitionen entsprechen nicht in jedem Fall der nötigen mathematischen Strenge.
Sie sind lediglich als **Überblick** über die wichtigsten Definitionen und Sätze des Moduls gedacht.

1 Übung

1.1 Satz von Fubini

Ein Integral einer stetigen Funktion über einen Elementarbereich:

$$v : a_j(x_1, ..., x_{j-1}) \leq x_j \leq b_j(x_1, ..., x_{n-1})$$

lässt sich durch die Hintereinanderausführung eindimensionaler Integrationen berechnen:

$$\int_V f dV = \int_{a_1}^{b_2} \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} ... \int_{a_n(x_1,x_2,...,x_{n-1})}^{b_n(x_1,x_2,...,x_{n-1})} f(x_1, ..., x_n)\, dx_n ... dx_1$$

1.2 Doppelintegrale mit konstanten Integrationsgrenzen

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy$$

Beispiel

$$f(x,y) = y\cos(x^2), \qquad V : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x}$$
$$\int_V f\, dV = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 y\cos(x^2)\, dx \right) dy$$

1.3 Bijektiv

- Injektivität: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- Surjektivität: Für $y = \mathbb{R}\ \exists\, x$ mit $f(x) = y$

Vorgehen

- Nach x umstellen
- x als Urbild, wenn überall definiert

1.4 Transformationssatz

Seien Ω, Ω' offene Mengen des $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1(\Omega, \Omega')$, bijektiv, $\varphi^{-1} \in C^1(\varphi(\Omega), \Omega)$, $f \in C(\Omega')$, so dass eine der beiden unten stehenden Integrale konvergiert.

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\, d^n y = \int_\Omega f(\varphi(x)) \cdot |det\, D\varphi(x)|\, d^n x$$

1.5 Integration Rotationskörper

Rotation um x-Achse

$$x \in [a, b]; \qquad y \in [0, f(x)]$$
$$v_x = \pi \int_b^a f(x)^2 \, dx$$

Rotation um y-Achse

$$v_y = \pi \int_b^a x^2 \cdot f'(x) \, dx = \pi \int_b^a (f^{-1}(x))^2 \, dx = \pi \int_{f^{-1}(b)}^{f^{-1}(a)} x^2 \cdot f'(x) \, dx$$

$$v_y = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f(x) \, dx$$

1.6 Koordinatentransformation

Eine bijektive Abbildung

$$T : \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix} \in B' \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(n_1, ..., n_n) \\ \vdots \\ x_n(n_1, ..., n_n) \end{pmatrix} \in B \subseteq \mathbb{R}^n$$

von B auf B' heißt *Koordinatentransformation* von B' nach B, falls T und T^{-1} in B'^0 und B^0 partiell nach $x_1, ..., x_n$ und $n_1, ..., n_n$ differenzierbar sind.

Beispiel

$$T^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \qquad T : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \\ r \sin\varphi \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \end{pmatrix}$$

2 Übung

2.1 Parametrisierung durch Bogenlänge

Sei $\alpha : I_{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, C^1, regulär, eine Parametrisierung von C.

$$s(t) = L^t_{\alpha=0}(\alpha) = \int_{\alpha=0}^t \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt \qquad (t \in [a, b], L^b_a(\alpha) = L(C))$$

$s : [a, b] \longrightarrow [0, L(C)] \qquad \rightarrow C^1$ Diffeomorphismus $\qquad \Rightarrow s'(t) = \|\dot{\alpha}(t)\|$

$\Rightarrow D(\vec{s}) = \alpha(s^{-1}(\vec{s})) \qquad \dot{D}(s) = 1$

2.2 Skalare Kurvenintegrale

Sei D ein glattes Kurvenstück und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, f stetig
$\Rightarrow t \longrightarrow f(\alpha(t))$ ist stetig für jede C^1-Parametrisierung von C.

$$\int_C f\, ds = \int_C f(\vec{x})\, ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\dot{\alpha(t)}\|\, dt = \int_a^b f(\alpha(t))\, ds$$

mit $\alpha : [a,b] \longrightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$ (ein Kurvenstück)

2.3 Vektorielle Kurvenintegrale

Sei $\alpha : [a,b] \longrightarrow C \subset \Omega$, $\alpha \in C^1([a,b],\Omega)$, Parametrisierung einer C^1-Kurve, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $v \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein stetiges Vektorfeld.

$$\int_C \vec{v}\, d\vec{x} = \int_a^b < \vec{v}(\vec{\alpha}(t)), \dot{\alpha}(t) > \, dt = \int_a^b \sum_k v_k(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha_k}(t)\, dt$$

heißt*vektorielles Kurvenintegral* von $\vec{v}$ bzgl. α (über C)

2.4 Schwerpunkt

μ: Massendichte

Kurve

$$\text{Masse von C:} \quad m = \int_C \mu\, ds$$

$$\Rightarrow s_k = \frac{1}{m} \int_C \mu x_k\, ds$$

Fläche

$$\text{Masse von M:} \quad m = \int_M \mu\, dxdy$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{1}{m} \int_M x\mu\, dxdy, \qquad y_s = \frac{1}{m} \int_M y\mu\, dxdy$$

Körper

$$\text{Masse von M:} \quad m = \int_M \mu\, dxdydz$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{1}{m} \int_M x\mu\, dxdydz$$

2.5 Trägheitsmoment

Sei $\omega \in \mathbb{R}^n$, $\|\omega\| = 1$, $g = \{t\omega : t \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow dist(x,g) = \|x - < x, \omega > \omega\| \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$

Trägheitsmoment von C bzgl. der Geraden g:

$$I = \int_C \mu\, [dist(x,g)]^2\, ds$$

Beispiel

- $g : z - Achse \qquad \Rightarrow [dist(x,g)]^2 = x^2 + y^2$
- $g : y - Achse \qquad \Rightarrow [dist(x,g)]^2 = x^2 + z^2$

3 Übung

3.1 Konservative Vektorfelder

Definition

$v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *konservativ*, wenn der Wert von $\int_\alpha v\,dx$ nur von den Endpunkten der Kurve abhängt und nicht vom Verlauf der Kurve.

- v ist konservativ, wenn $\oint_C v\,dx = 0$
- v ist konservativ, wenn $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist und Ω einfach zusammenhängend ist.

Integrabilitätsbedingung

$$\frac{dv_k}{dx_i} = \frac{dv_i}{dx_k} \qquad i, k = 1, ..., n$$

3.2 Potential

Definition

$U \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ heißt *Potential* für das Vektorfeld $v : R \to \mathbb{R}$, wenn $v = \nabla U$ ist, d.h. $v_k = \frac{dU}{dx_k}$ mit $k = 1, ..., n$.

$$\int_\gamma v\,dx = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) \qquad (\gamma : [a,b] \to \Omega)$$

Berechnung

$v_1 = U_x, v_2 = U_y, v_3 = U_z, ...$

$U = \int v_1\,dx = ... + f(y,z,...)$

$\frac{\partial U}{\partial y} = ...f'(y,z,...) \overset{!}{=} v_2$

$f(y,z) = \int rest\,dy + f(z,...)$

bis alle Konstanten bestimmt sind!

3.3 Leibnizsche Sektorformel

Flächeninhalt von:

$$\Omega : \quad V^2(\Omega) = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$

Greensche Formel (Herleitung)

$$\oint_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega (Q_x - P_y)\,dxdy$$

3.4 Parametrisierung und Orientierung

Seien α und β zwei Parametrisierungen von C.

Man kann schreiben $\alpha = \beta \circ h$

$$\int_\alpha v\,dx = \begin{Bmatrix} \int_\beta v\,dx \mid \dot{h} > 0 \\ -\int_\beta v\,dx \mid \dot{h} < 0 \end{Bmatrix}$$

3.5 Einfach zusammenhängende Gebiete

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, offen, zusammenhängend, heißt *einfach zusammenhängend*, wenn sich jede glatte, geschlossene, ganz in Ω verlaufende Kurve stetig in einen Punkt zusammenziehen lässt.

4 Übung

4.1 Divergenz, Rotation, Gradient

Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}; v : \Omega \to \mathbb{R}^3$, dann gilt:

- $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
- $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$
- $grad(u) = \nabla u = (u_x, u_y, u_z)$
- $div(v) = \nabla \cdot v = d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3$
- $rot(v) = \nabla \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (d_2 v_3 - d_3 v_2)i + (d_3 v_1 - d_1 v_3)j + (d_1 v_2 - d_2 v_1)k$

Rechenregeln

Sei $u \in C^1(\Omega)$, $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, dann gilt:

- $rot\,\nabla u = 0$
- $div\,rot\,v = 0$
- $rot\,rot\,v = \nabla(div\,v) - \Delta v$
- $div(v \times w) =< rot\,v,\, w > - < v,\, rot\,w >$
- $rot(u \cdot v) = \nabla u \times v + u\,rot\,v$
- $rot(v \times w) = (div\,w)v - (div\,v)w + (dv)w - (dw)v = (\nabla \cdot w)v - (\nabla \cdot v)w + (w \cdot \nabla)v - (v \cdot \nabla)w$

4.2 Vektorpotential

Definition

Sei $w \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, w heißt *Vektorpotential* für v, wenn $v = rot\,w$.

Bemerkung

Angenommen v besitzt ein Vektorpotential w, dann gilt:

$$div\, v = div\, rot\, w = 0$$

4.3 Oberflächenintegral

Definition: Flächenstück & Parametrisierung

Sei $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$, mit

$$U \ni u \longrightarrow \Phi(u) = \begin{pmatrix} \Phi_1(u) \\ \Phi_2(u) \\ \Phi_3(u) \end{pmatrix}$$

stetig, dann heißt $M = \Phi(U)$ *Flächenstück* im $\mathbb{R}^3$ und Φ *Parametrisierung* von M.

Definition: Glattes Flächenstück

M heißt *glattes Flächenstück*, wenn es eine C^1-Parametrisierung Φ gibt, mit $rang(\Phi_n) = 2$.

$$\text{Tangentenvektor} : \begin{pmatrix} \partial_1 \Phi_1 \\ \partial_1 \Phi_2 \\ \partial_1 \Phi_3 \end{pmatrix}$$

- Die Tangentenvektoren müssen linear unabhängig sein
- Die Abbildung $u \longrightarrow \phi(u)$ ist eindeutig

Definition: Normalenvektor

$N = \phi_{u_1} \times \phi_{u_2}$, $N \perp \phi_{u_k}$, $k = 1, 2$

4.4 Rotationsflächen

Sei C geschlossene glatte Kurve in der rechten Hälfte der x-z-Ebene. Lässt man diese Kurve um die z-Achse rotieren, so entsteht eine glatte Rotationsfläche. C ist parametrisiert durch $(r(t), z(t))$, $t \in [a, b]$.

$\Rightarrow M$ ist gegeben durch $(t, \Theta) \longrightarrow (r(t) \cos \Theta,\, r(t) \sin \Theta,\, z(t))$

Erste Guldinsche Regel

Rotation um x-Achse:

$$A(M)_x = 2\pi L y_s$$

Dabei ist $A(M)$ der Flächeninhalt einer Mantelfläche M, L die Länge von C und y_s der Schwerpunkt von C, wenn C in Halbebene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ liegt.

Zweite Guldinsche Regel

Rotation um x-Achse:

$$V_x = A \cdot 2\pi y_s = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Dabei ist V das Volumen eines Rotationskörpers, A der Flächeninhalt der Oberfläche und R der Radius des Kreises, welcher durch die Rotation erzeugt wird. y_s ist die y-Komponente des Schwerpunktes von A.

4.5 Flächeninhalt von Flächenstücken

Sei $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Flächenparametrisierung und $M \subset \mathbb{R}^3$.

$A(M) = A(\phi(u)) = \int_U \sqrt{g(u)} \, du_1 du_2$, falls das Integral konvergiert.

$$\begin{aligned} \sqrt{g(u)} &= \|\partial_1 \phi(u) \times \partial_2 \phi(u)\| \\ &= \sqrt{det(g_{ik})} = \sqrt{det(< \partial_i \phi, \, \partial_k \phi >)} \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}} = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ mit: $g_{11} = \|\partial_1 \phi(u)\| \qquad g_{12} =< \partial_1 \phi(u), \partial_2 \phi(u) >$

$\rightarrow$ Unabhängig von Parametrisierung

Parametrisierung von Graphen

$u_1, u_2 \longrightarrow (u_1, u_2, \varphi(u_1, u_2)) = \phi(u)$

$$A(\phi(u) = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla \varphi\|^2} \, du_1 du_2$$

Rotationsflächen

Kurve C in x-z-Ebene, Rotation um z-Achse, Entstehung von M.

- C^1-Parametrisierung von Kurve $(r(t), z(t))$, $a \le t \le b$, $r(t) \ge 0$
- Parametrisierung von $M : (r(t) \cos(s), \, r(t) \sin(s), \, z(t))$, $s \in [0, 2\pi)$, $t \in [a, b]$

$$A(M) = 2\pi \int_a^b r(t) \sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt$$

5 Übung

5.1 Skalare Oberflächenintegrale

$M \subset \mathbb{R}^3 : C^1$-Flächenstück, $f \in C^1(M)$, $\phi : U \longrightarrow M$ Parametrisierung, $u \in \mathbb{R}^2$

$$\int_M f \, dA = \int_U f(\phi(u)) \cdot \|\partial_1 \phi(u) \times \partial_2 \phi(u)\| \, du_1 du_2$$

Orientierung von Flächenstücken

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ ein C^1-Flächenstück mit 2 Parametrisierung ψ und ϕ.

$\phi : U \longrightarrow M$, $\psi : V \longrightarrow M$, $V \subset \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$

- $\exists$ ein C^1-Diffeomorphismus $h : U \longrightarrow V$, so dass $\phi = \psi \circ h$.
  ϕ und ψ heißen *gleichgesinnt*, wenn $det(dh) > 0$
  ϕ und ψ heißen *entgegengesinnt*, wenn $det(dh) < 0$
- Wir erhalten ein orientiertes Flächenstück, wenn wir eine der beiden Orientierungen auszeichnen.
- Der von den Tangentialvekoren $\partial_1\phi(u)$, $\partial_2\phi(u)$ aufgespannte 2-dimensionale Unterraum des $\mathbb{R}^3$ heißt *Tangentialraum* T_xM.
- Unter einem *Einheitsnormalenfeld* von M verstehen wir ein stetiges Vekorfeld $n : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $n(x) \perp T_xM$, $\|n(x)\| = 1$, $(x \in M)$

Satz

$\exists!$ Einheitsnormalenfeld von M mit:

$$n(x) = \frac{\partial_1\phi(u) \times \partial_2\phi(u)}{\|\partial_1\phi(u) \times \partial_2\phi(u)\|} \qquad x = \phi(u)$$

$\rightarrow$ Je nachdem wie die Orientierung festgelegt ist

5.2 Vektorielle Oberflächenintegrale

M : C^1-Flächenstück, $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld

$$I = \int_M v\, dO = \pm \int_V < v \circ \phi,\, \partial_1\phi \times \partial_2\phi > \, du_1 du_2 = \iint_M v \cdot n\, dA$$

$$\text{mit} < v \circ \phi,\, \partial_1\phi \times \partial_2\phi >= \begin{vmatrix} v_1 \circ \phi_1 & v_2 \circ \phi_2 & v_3 \circ \phi_3 \\ \partial_1\phi_1 & \partial_1\phi_2 & \partial_1\phi_3 \\ \partial_2\phi_1 & \partial_2\phi_2 & \partial_2\phi_3 \end{vmatrix}$$

Dabei entspricht dO einem vektoriellen Oberflächenelement und dA einem skalaren Oberflächenelement.

- "$+$", wenn ϕ positive Parametrisierung
- "$-$", wenn ϕ negative Parametrisierung

Beispiel

M in impliziter Form: $F(x, y, z) = 0$

$$\Rightarrow n(x) = \pm \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$$

Explizite Darstellung: $z = \varphi(x, y)$, $\rightarrow$ Projektion auf x-y-Ebene

$$\Rightarrow n = \pm \frac{(\varphi_x, \varphi_y, 1)}{\sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}}$$

$$\Rightarrow \int_M v\, dO = \pm \int_U v \cdot \frac{\nabla F}{F_z}\, dxdy = \pm \int_U < v,\, (\varphi_x, \varphi_y, 1) > \, dxdy$$

Analog: Explizite Darstellung: $y = \varphi(x,z)$, $\rightarrow$ Projektion auf x-z-Ebene

$$\Rightarrow \int_M v\, dO = \pm \int_U v \cdot \frac{\nabla F}{F_y}\, dxdz = \pm \int_U < v,\, (\varphi_x, 1, \varphi_z) > dxdz$$

mit $\partial_1\phi \times \partial_2\phi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_1\phi_1 & \partial_1\phi_2 & \partial_1\phi_3 \\ \partial_2\phi_1 & \partial_2\phi_2 & \partial_2\phi_3 \end{vmatrix}$

5.3 Integralsätze in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Greenscher Satz

Sei G ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^2$, $\partial G = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i = \Gamma$ mit zusammenhängenden geschlossenen Kurven Γ_i. Die Γ_i seien so orientiert, dass beim Durchlaufen das Gebiet G zur Linken liegt. Sei $(P,Q) \in C^1(G_1, \mathbb{R})$, wobei $\bar{G} \subset G_1$.

$$\iint_G (Q_x - P_y)\, dxdy = \int_\Gamma Pdx + Qdy$$

Rotation-Version

$v(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0))$, $rot\, v = (0, 0, Q_x - P_y)$

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \int_\Gamma (P,Q) \cdot T\, ds = \int_G rot\, v\, dxdy$$

Divergenz-Version

$v = (v_1, v_2) = (Q, -P)$

$$\iint_G (Q_x - P_y)\, dxdy = \iint_G div\, v\, dxdy = \int_\Gamma v \cdot n\, ds$$

Satz von Stokes

$M \subset \mathbb{R}^3$: C^1-Flächenstück, ∂M eine Vereinigung endlich vieler disjunkter geschlossener C^1-Kurven. Die Orientierung von M folgen der Rechte-Hand-Regel. Sei $v \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$, $\bar{M} \subset G \subset \mathbb{R}^3$, G offen.

$$\iint_M < rot\, v,\, n > dO = \int_C < v,\, T > ds = \int_C v\, d\tilde{x} = \int_C v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3$$

Dabei ist n Einheitsnormale auf M und T Einheitstangente auf C.

- $M \subset \mathbb{R}^2$, so erhält man die Rotations-Version (Curl-Version) des Satzes von Green
- M einfach zusammenhängend, so $\int_C < v\, T > ds$ die *Zirkulation* von v über geschlossene Kurve s
- *Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen*:
  Sei $G \subset \mathbb{R}^3$, einfach zusammenhängend, $v \in C^2(G)$ mit $rot\, v = 0$ in G
  $\Rightarrow v$ ist konservativ

Satz von Gauss-Ostogratski

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet, $\partial G = F$ sei Vereinigung endlich vieler, paarweise disjunkter C^1-Flächenstücke, die durch die Außennormale orientiert sind. Sei $v \in C^1(G_1, \mathbb{R}^3)$, $\bar{G} \subset G_1 \subset \mathbb{R}^3$, G_1 offen.

$$\iiint_G div\, v\, dV = \iiint_G (v_{1x} + v_{2y} + v_{3z})\, dxdydz = \iint_F < v,\, n > dA$$

- $\iiint_G \nabla(u \cdot \nabla v)\, d^3\tilde{x} = \iint_{\partial G} u\, \frac{\partial v}{\partial n}\, do - \iiint_G n \nabla v\, d^3\tilde{x}$
- $\iiint_G (u\nabla v - v\nabla u) d^3\tilde{x} = \iint_{\partial G} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\, do$
- $\iiint_G \nabla u\, d^3\tilde{x} = \iint_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n}\, do$

6 Übung

6.1 Rechenregeln: Komplexe Zahlen

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\bar{z} = x - iy = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

$z = re^{i\varphi}, \quad \bar{z} = re^{-i\varphi}$

mit $r = |z|$ und $\varphi = \arctan\frac{y}{x} \in [-\pi, \pi]$

Addition, Subtraktion

$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

Multiplikation, Division

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

Potenzen

$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

Wurzel

$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}(\cos(\frac{\varphi+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi+2k\pi}{n})) = r^{1/n} \cdot e^{i(\varphi+2\pi k)\cdot 1/n} \qquad k = 0, ..., n-1$

Logarithmus

$z = re^{i(\varphi+2\pi k)} \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\ln(z) = ln(r) + ln(e^{i(\varphi+2\pi k)}) = ln(r) + i(\varphi + 2\pi k)$

Winkelfunktionen

$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$

$\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \qquad \sinh(iz) = i\sin(z)$

$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \qquad \cosh(iz) = \cos(z)$

Verallgemeinerte Potenzfunktion

$a^z = \exp[z(log|a| + i(arg(a) + 2k\pi))]$

6.2 Funktionentheorie

Konvergenz

Sei $z_0 \in \Omega$, $f : \Omega \backslash \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$. Wir schreiben $\alpha = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, ($\alpha \in \mathbb{C}$), falls für alle Zahlenfolgen $\{z_n\} \subset \Omega$, mit $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n - z_0| = 0$ und $z_n \neq z_0 \forall n$ gilt.

$$\lim_{n \to \infty} |f(z_n) - \alpha| = 0$$

Stetigkeit

Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$.

f ist *stetig* in z_0, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ ist.

Komplexe Differenzierbarkeit

f ist in z_0 *komplex differenzierbar*, wenn der Limes

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0}{z - z_0} = L \quad \text{existiert.}$$

$$\Rightarrow L = f'(z_0) = \frac{df(z_0)}{dz}$$

Holomorphe Funktionen

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, wenn f komplex differenzierbar und f' stetig ist, in jedem Punkt in Ω.

Satz: Cauchy-Riemannsche-DGL

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$ ist holomorph $\Leftrightarrow u, v \in C^1(\Omega)$ und $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ in Ω gilt. Es gilt dann:

$$f' = u_x + iv_x$$

- Alle Richtungsableitungen haben den gleichen Grenzwert
- Die Vektorfelder $(u, -v)$ und (v, u) sind divergenzfrei und erfüllen die Integrabilitätsbedingung

Vorgehen: Holomorphe Funktion bestimmen

$u(x, y)$ gegeben: Man bestimme $v(x, y)$, damit f holomorph ist.

- $u_x = ... = v_y \rightarrow v = \int v_y \, dy = ... + g(x)$
- $v_x = ... + g'(x) \stackrel{!}{=} -u_y \rightarrow$ umstellen nach $g'(x)$

6.3 Kurvenstück, Bogenlänge und Kettenregel

C^1-Kurvenstück

$\gamma : t \longrightarrow z(t) = x(t) + iy(t)$, $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ ist *orientiertes Kurvenstück*.

Bogenlänge

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = \int_a^b |\dot{z}(t)|\, dt = \int_a^b ds$$

Kettenregel

Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma \subset \Omega$, $\gamma : t \longrightarrow z(t)$, dann gilt:

$$\frac{d}{dt} f(z(t)) = f'(z(t))\dot{z}(t)$$

6.4 Komplexe Kurvenintegrale

1. Komplexes Kurvenintegral

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt \qquad \text{mit } f = u + iv$$

2. Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b \dot{F}(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

3. Parametrisierung und Orientierung

Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, $\gamma \subset \Omega$ glattes Kurvenstück mit Parametrisierung $z(t)$, $t \in [a, b]$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\, dz \qquad \text{(unabhängig von Parametrisisierung)}$$

Ausnahme: Orientierung

$$\int_{-\gamma} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$$

$$\left| \int_a^b f(z)\, dz \right| \leq \sup |f| \cdot L(\gamma)$$

6.5 Stammfunktion

Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\int_\gamma f(z)\, dz$ wegunabhängig in Ω. Setzt man für einen festen Punkt $z_0 \in \mathbb{R} : F(z) = \int_{z_0}^z f(z)\, dz = \int_\gamma f(\omega)\, d\omega$, wobei γ ein beliebiger glatter in $\mathbb{R}$ verlaufender Weg von z_0 nach z ist.

$\Rightarrow$ F ist holomorph und eine Stammfunktion von f

Folgerung

Sei f holomorph in Ω und sei Ω einfach zusammenhängend.

$\Rightarrow$ f hat eine Stammfunktion

$\Rightarrow$ $\oint_\gamma f(z)\, dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg in Ω

7 Übung

7.1 Kompakte Konvergenz

Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $f_n(z) \longrightarrow f(z) \forall z \in \mathbb{R}$ (punktweise Konvergenz).

$|f_n(z)|, |f(z)| \leq C \forall z \forall n$, $\{f_n\}$ konvergiert kompakt gegen f, wenn außerdem $\|f - f_n\|_k \longrightarrow 0$ für alle kompakten Teilmengen in Ω.

$$\|f - f_n\| = \sup\{|f(z) - f_n(z)|,\ z \in K\}$$

7.2 Vertauschung von Integral und Limes

Sei $f_n \longrightarrow f$, $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und gleichmäßig beschränkt, f_n konvergiert kompakt gegen f.

$\Rightarrow$ f ist stetig und beschränkt

Für alle glatten Wege $\gamma \subset \Omega$ gilt:

$$\Rightarrow \int_\gamma f_n(z)\, dz \longrightarrow \int_\gamma f(z)\, dz$$

7.3 Komplexe Reihen

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \quad R = \infty$$

$$log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}\,, \quad R = 1$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \quad R = \infty$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,, \quad R = \infty$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,, \quad R = 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n\,, \quad R = 1$$

7.4 Gliedweise Differenzierbarkeit

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ absolut konvergent für $|z - z_0| < R$.

$\Rightarrow$ f ist $B_R(z_0)$ beliebig oft differenzierbar und die Ableitungen ergeben sich durch gliedweise Differentiation.

7.5 Abschätzung der Koeffizienten

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit $KR = R$. Für $0 < r < R$ definieren wir:

$$M(f, r) = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{M(f,r)}{r^n}\,, \qquad (n = 0, 1, ...)$$

7.6 Konvergenz holomorpher Funktionen

$f_n, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, f_n holomorph, $f_n \longrightarrow f$ mit komplexer Konvergenz.

$\Rightarrow f$ ist holomorph und $f_n^{(k)} \longrightarrow f^{(k)}$ mit komplexer Konvergenz

Folgerung

Eine kompakte konvergierende Reihe aus holomorphen Funktionen stellt eine holomorphe Funktion dar und ist beliebig oft gliedweise differenzierbar.

7.7 Analytische Funktionen

Definition

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt analytisch, wenn es zu jedem $z_0 \in \Omega$ ein $R > 0$ gibt, so dass f in $B_R(z_0)$ eine Potenzreihenentwicklung hat.

- f ist beliebig oft komplex differenzierbar in Ω
  $f^{(h)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} k(k-1)...(k-n+1)a_n(z-z_0)^n$, $(z \in B_R(z_0))$
- Seien f und g analytisch $\Leftrightarrow$ Jede LK und auch $f \cdot g$ sind analytisch
  $f(z) \cdot g(z) \sum_{n \geq 0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}$

Identitätsreihen

Sei $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $z_0 \in \mathbb{R}$, $\{z_n\} \subset \Omega$, $z_n \longrightarrow z_0$, $z_n \neq z_0 \forall n$ und $f(z_n) = g(z_n) \forall n$.

$$\Rightarrow f(z) = g(z) \quad \text{in } \Omega$$

7.8 Nullstellen

Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch und nicht konstant:

- Ist $z_0 \in \Omega$, $f(z_0) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ und g ist eine Funktion in einer Umgebung von z_0 mit $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$, $g(z_0) \neq 0$
- f hat Nullstelle der Ordnung $k \Longleftarrow 0 = f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{k-1}(z_0)$
- In jeder kompakten Teilmenge von Ω hat f höchstens endlich viele Nullstellen

Satz

Jede holomorphe Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ ist auch analytisch in Ω und ist beliebig oft differenzierbar.

Für $z_0 \in \Omega$ ist der Konvergenzradius R der Reihenentwicklung komplex.

8 Übung

8.1 Singularitäten

Definition

$f : \Omega \backslash \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann heißt z_0 *isolierte Singularität.*

1. Hebbare Singularität

z_0 heißt *hebbare Singularität* von f, wenn es eine Umgebung von z_0 und eine holomorphe Funktion $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt, so dass $f = g$ in $U \backslash \{z_0\}$ gilt.

Satz: Sei f holomorph und beschränkt in $0 < |z - z_0| < R$, $(R > 0)$. Dann ist z_0 eine hebbare Singularität.

2. Polstelle

f sei holomorph in $\Omega\backslash\{z_0\}$, z_0 heißt *Polstelle*, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

Satz: Sei f holomorph für $0 < |z - z_0| < R$. Dann hat f einen *Pol* in $z_0 \Leftrightarrow f$ hat eine Laurent-Reihe:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit } a_{-m} \neq 0$$

m heißt *Ordnung des Pols*.

3. Wesentliche Singularität

Satz: f hat in z_0 eine *wesentliche Singularität* $\Leftrightarrow$ Der Hauptteil $h(z)$ der Laurent-Entwicklung von f hat unendlich viele nicht verschwindende Glieder.

Satz: Sei f holomorph in $0 < |z - z_0| < R$ mit einer wesentlichen Singularität in z_0.

$\Rightarrow$ Zu jedem $a \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge $z_n \longrightarrow z_0$, so dass $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = a$

Ferner gibt es eine Folge $w_n \longrightarrow z_0$, so dass $\lim\limits_{n \to \infty} |f(w_n)| = \infty$

8.2 Laurent-Reihe

Definition

Eine Reihe der Form:

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \quad (a_n \in \mathbb{C},\, n \in \mathbb{Z})$$

heißt *Laurent-Reihe.* $L(z)$ heißt konvergent in z, wenn die beiden Reihen:

$$r(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad \text{und} \quad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{-n}$$

in z konvergieren. Dabei entspricht h dem *Hauptteil* und r dem *Nebenteil.*

Theorem

Sei $f(z)$ holomorph in $K(r, \rho) = \{z \in \mathbb{C} : \, r \subset |z - z_0| \subset R\}\}$, $(0 \leq r \leq R \leq \infty)$

$\Rightarrow$ f besitzt dort eine Laurent-Reihe, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ und es gelten die *Cauchyschen Formeln.*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw \,, \quad n \in \mathbb{Z} \,, \quad r < \rho < R$$

Bemerkung

Sei $M(f,\rho) = \max\{|f(z)| : z \in S_\rho(z_0)\}$, dann gilt:

$$|a_n| \leq \frac{M(f,\rho)}{\rho^n}\,, \quad \text{für } r < \rho < R$$

8.3 Cauchy-Formeln

Jede holomorphe Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ ist auch analytisch in Ω und beliebig oft holomorph differenzierbar. Für $z_0 \in \Omega$ ist der Konvergenzradius R der Reihenentwicklung komplex.

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$$

Ferner gelten die *Cauchy-Formeln*:

$$a_n = \frac{f^{(k)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

8.4 Cauchyscher Integralsatz

$\Omega = \Omega_0 \setminus \cup_{k=1}^N \bar{U}_k$, wobei $U_1, ..., U_N$ paarweise disjunkt mit glattem Rand, $\bar{U}_k \subset \Omega\ \forall k$
$\Omega_0, ..., U_N$ einfach zusammenhängend, f holomorph in Ω, $\partial\Omega = \gamma$.

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Der Durchlaufsinn ist immer so gewählt, dass das Gebiet zur Linken liegt.

8.5 Residuen

Definition

Sei f holomorph, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, mit Ausnahme einer isolierten Singularität $z_0 \leq \Omega$. Hat dann f die Laurent-Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für $0 < |z-z_0| < R$, so heißt der Koeffizient a_{-1} das *Residuum* von f an der Stelle z_0.

Bezeichnung

Für jeden zu f und $S_r(z_0)$ homologen Weg γ

$$a_{-1} = Res(f,z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(z_0)} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz$$

Berechnung

1. f habe in z_0 entweder eine hebbare Singularität oder einen Pol 1. Ordnung.
   $\Rightarrow Res(f,z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$
   Bemerkung: hebbare Singularität: $Res(f,z_0) = 0$
2. $Res(\alpha f + \beta g,\, z_0) = \alpha Res(f,z_0) + \beta Res(g,z_0)$
3. f habe einen Pol 1. Ordnung, g sei holomorph in z_0
   $\Rightarrow Res(f \cdot g, z_0) = g(z_0) \cdot Res(f,z_0)$
4. Sei $f = \frac{p}{q}$, p,q holomorph in z_0, q habe eine Nullstelle 1. Ordnung in z_0
   $\Rightarrow Res(\frac{p}{q}, z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

8.6 Residuensatz

Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit Ausnahme von endlich vielen isolierten Singularitäten $z_1, ..., z_n$ in Ω.
Sei Ω_1 einfach zusammenhängend, $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ und $\gamma = \partial\Omega$, $z_1, ..., z_N \subset \Omega_1$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} Res(f, z_n)$$

9 Übung

9.1 Uneigentliche Integrale

Satz 1

Sei d holomorph in $\mathbb{C}$, mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten $z_1, ..., z_N$, die nicht auf der reellen Achse liegen. Ferner sei $|f(z)| = \frac{C}{|z|^2}$ für $|z| \geq R_0$ und für $Im(z) > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} Res(f, z_k)$$

Satz 2

Sei $R(x, y)$ eine reelle, rationale Funktion von x und y. Weiter sei $R(\cos(t), \sin(t))$ definiert für $t \in [0, 2\pi]$.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\, dt = 2\pi i \sum_{K: z_k \in B_1(0)} Res(f, z_k) \quad \text{wobei} \quad f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\right)$$

Satz 3

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x)\, dx$$

Es seien:

- $\alpha > 0$
- $f : F \backslash \{z_1, ..., z_r, x_1, ..., x_m\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph
- f hat in $x_1, ..., x_m$ einfache Pole
- $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene ganzzahlige Vielfache von π/a
- $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \sin(\alpha x)\, dz = Im\left(2\pi i \sum_{\nu=1}^{r} Res(e^{i\alpha z} f(z), z_0) + \pi i \sum_{\mu=1}^{\infty} Res(e^{i\alpha z} f(z), x_\mu)\right)$$

- Analog: $\cos(\alpha x)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos(\alpha x)\, dz = Re\left(2\pi i \sum_{\nu=1}^{r} Res(e^{i\alpha z} f(z), z_0) + \pi i \sum_{\mu=1}^{\infty} Res(e^{i\alpha z} f(z), x_\mu)\right)$$

9.2 Fourierreihen

Betrachte Funktionen $u : [\pi, -\pi] \to \mathbb{C}$, u wird in trigonometrische Reihen entwickelt.

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

$$c_k = \begin{cases} {}^1\!/\!{}_2(a_k - ib_k) & \text{für } k > 0 \\ {}^1\!/\!{}_2 a_0 & \text{für } k = 0 \\ {}^1\!/\!{}_2(a_{-k} - ib_{-k}) & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

9.3 Fouriersche Formeln

Konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig auf $[\pi, -\pi]$, so ist u stetig und $u(\pi) = u(-\pi)$, es gilt:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos(kt)\,dt && \text{mit } k = 0, 1, ... \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\sin(kt)\,dt && \text{mit } k = 1, 2, ... \\ c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)e^{-ikt}\,dt && \text{mit } k = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Bemerkungen

- Ist u eine *ungerade* Funktion: $u(x) = -u(x) \Rightarrow a_k = 0\ \forall k$
- Ist u eine *gerade* Funktion: $u(x) = u(-x) \Rightarrow b_k = 0\ \forall k$

10 Wellengleichung

10.1 Homogen

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty]$

$\Rightarrow$ **Allgemeine Lösung:** $\boldsymbol{u(x, y) = R(x + ct) + S(x - ct)}$

Anfangsbedingungen

- $u(x, 0) = F(x) = R(x) + S(x)$
- $u_t(x, 0) = G(x) = cR'(x) - cS'(x)$

$\to R(x) = \frac{1}{2}(F(x) + \frac{1}{x}\int_0^x G(s)\,ds)$

$\to S(x) = \frac{1}{2}(F(x) - \frac{1}{x}\int_0^x G(s)\,ds)$

$\Rightarrow$ **Allgemeine Lösung:** $\boldsymbol{u(x, t) = \frac{1}{2}[F(x + ct) + F(x - ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(s)\,ds}$

$\to$ Wenn $F, G = 0 \quad \Rightarrow u(x, t) = 0$

Eingespannte Seite

- $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ auf $[0, \pi] \times [0, \infty]$
- Randbedingungen: $u(0,t) = u(L,t) = 0$ auf $(0, \infty)$
- Anfangsbedingungen: $u(x,0) = f(x)\,,\ u_t(x,0) = g(x)$

1.Seperationsansatz:

$$\Rightarrow \textbf{Allgemeine Lösung:} \quad \boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos(\frac{\pi nct}{L}) + b_n sin(\frac{\pi nct}{L})] \cdot sin(\frac{\pi nx}{L})}$$

$\rightarrow$ Anfangsbedingugen: $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x,0) sin(\frac{\pi nx}{L})\,dx\,,\qquad b_n = \frac{2}{\pi nc} \int_0^L u_t(x,0) sin(\frac{\pi nx}{L})\,dx$

2.d'Alambert:

$$\Rightarrow \textbf{Allgemeine Lösung:} \quad \boldsymbol{u(x,t) = \frac{1}{2}\,[F(x+ct) + F(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s)\,ds}$$

wobei F,G: ungerade, 2L-periodische Fortsetzungen von f und g sind

10.2 Inhomogen

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t) \quad$ in $[0, L] \times [0, \infty]$

Randbedingungen: $u(0,t) = u(L,t) = 0$ für $t > 0$

Anfangsbedingungen: $u(x,0) = f(x)\,,\ u_t(x,0) = g(x)$ in $[0, \pi]$

1. $\boldsymbol{h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) sin(\frac{\pi nx}{L})}$ (ungerade, 2L-periodische Fortsetzung)

$\Rightarrow$ Lösung der Form:$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$

- $w(x,t) = \frac{1}{2}\,[F(x+ct) + F(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s)\,ds$ (siehe eigespannte Seite)
- $v_{tt} - c^2 v_{xx} = h(x,t) = h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) sin(\frac{\pi nx}{L})$
  $v(0,t) = v(L,t) = 0$
  $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$

$\Rightarrow v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos(\frac{\pi nct}{L}) + b_n sin(\frac{\pi nct}{L})] \cdot sin(\frac{\pi nx}{L})$

$\rightarrow$ Variation der Konstanten: $a_n = \frac{-L}{\pi nc} \int_0^L c_n(s) sin(\frac{\pi ns}{L})\,ds\,,\qquad b_n = \frac{L}{\pi nc} \int_0^L c_n(s) cos(\frac{\pi ns}{L})\,ds$

2. $\boldsymbol{h(x,t) = h(x)}$

$\rightarrow$ Lösen von: $c^2 v''(x) = h(x)$

$\rightarrow$ Lösen von: $w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0\,,\ w(x,0) = -V(x)\,,\ w_t(x,0) = 0$

wobei $V(x)$: ungerade Fortsetzung von $v(x)$ auf $[-L, L]$

$$\Rightarrow w(x,t) = \frac{1}{2}[V(x+ct) + V(x-ct)]$$

10.3 Energieerhaltung

$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [{u_t}^2 + c^2 {u_x}^2]\,dx = const.$

$\rightarrow$ Beweis der Eindeutigkeit des Problems

11 Wärmeleitungsgleichung

11.1 Homogen

Dirichlet-Problem

1. $u_t = u_{xx}$
2. $u(0,t) = u(L,t)\,, \quad t \geq 0$
3. $u(x,0) = f(x)\,, \quad f \in PC^1[0,L]\,, \quad f(0) = f(L) = 0$

Lösung

$u(x,0)$ heißt Lösung, wenn:

- u_k, u_x, u_{xx} auf $[0,L] \times [0,\infty)$ existiert
- u_k, u_x, u_{xx} stetig auf $(0,L) \times (0,\infty)$

1. Separation: Lösen von (1) und (2)

$$\Rightarrow u_n(x,t) = \exp[-(\frac{\pi n}{L})^2 t] \cdot \sin(\frac{\pi n x}{L})$$

2. Anfangsbedingungen: $\quad u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{\pi n x}{L})$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) sin(\frac{\pi n x}{L})\, dx$$

Neumannsche Randbedingungen

1. $u_t = u_{xx}$
2. $u_x(0,t) = u_x(L,t)\,, \quad t \geq 0$
3. $u(x,0) = f(x)\,, \quad f \in PC^1[0,L]\,, \quad f(0) = f(L) = 0$

Lösung

1. Separation: Lösen von (1) und (2)

$$\Rightarrow u_n(x,t) = \exp[-(\frac{\pi n}{L})^2 t] \cdot \cos(\frac{\pi n x}{L})$$

2. Anfangsbedingungen: $\quad u(x,0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{\pi n x}{L})$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) cos(\frac{\pi n x}{L})\, dx$$

11.2 Inhomogen

- $u_t - u_{xx} = F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin(\frac{\pi n x}{L})$
- $u(0,t) = u(L,t)\,,\; u(x,0) = g$

Lösung

Lösung der Form: $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$

1. $v_t - v_{xx} = 0$
   $v(0,t) = v(L,t)\,,\ v(x,0) = g$
   $$\Rightarrow v_n = a_n \exp[-(\frac{\pi n}{L})^2 t] \cdot \sin(\frac{\pi n x}{L})$$
2. $w_t - w_{xx} = F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin(\frac{\pi n x}{L})$
   $w(0,t) = w(L,t) = w(x,0) = 0$
   $$\Rightarrow w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin(\frac{\pi n x}{L})$$
   Variation der Konstanten: $w_n(t) = \int_0^t \exp[-(\frac{\pi n}{L})^2 (t-s)] F_n(s)\, ds$

11.3 Energieerhaltung

$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L {u_x}^2\, dx = const.$

$\rightarrow$ Beweis der Eindeutigkeit des Problems

12 Übung

12.1 Laplace-Gleichung

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Gebiet, $f \in C(\partial\Omega)$

1. $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ in Ω
2. $u = f$ auf $\partial\Omega$
3. $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$

Dirichlet-Problem auf Rechteck

$\Omega = [0,l] \times [0,L] = \{(x,y) : x \in [0,l]; y \in [0,L]\}$

Fall: $u(x,0) = f_1(x)\,,\ u(x,L) = f_2(x)\,,\ u(0,y) = u(l,y) = 0$

$\rightarrow$ Analog für: $u(0,y) = f_(y)\,,\ u(l,y) = f_2(y)\,,\ u(x,0) = u(x,L) = 0$

1. Separation mit: $u(0,y) = u(l,y) = 0$

$$\Rightarrow u_n = [a_n \cosh(\frac{\pi n y}{l}) + b_n \sinh(\frac{\pi n y}{l})] \sin(\frac{\pi n x}{l})$$

2. Randbedingungen:

$$u(x,0) = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{\pi n x}{l})$$

$$u(x,L) = f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cosh(\frac{\pi n L}{l}) + b_n \sinh(\frac{\pi n L}{l})] \sin(\frac{\pi n x}{l})$$

$$\rightarrow c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_2(x) \sin(\frac{\pi n x}{l})\, dx = a_n \cosh(\frac{\pi n L}{l}) + b_n \sinh(\frac{\pi n L}{l})$$

Dirichlet-Problem auf Kreis

$\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$

1. Possion-Formel: $u(\overrightarrow{x}) = \frac{1-\|\overrightarrow{x}\|^2}{2\pi} \int_{\partial B_1(0)} \frac{f(\overrightarrow{y})}{\|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\|^2} \, dS(\overrightarrow{y}) = \frac{1-{x_1}^2+{x_2}^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\cos\phi, \sin\phi)}{(x_1-\cos\phi)^2+(x_2-\sin\phi)^2} \, d\phi$

2. Transformation in Polarkoordinaten

   - $u(r\cos\phi, r\sin\phi) = U(r,\phi) \qquad r \in [0,1]\,,\ \phi \in [-\pi,\pi]$
   - $f(\cos\phi, \sin\phi) = F(\phi) \qquad U(1,\phi) = F(\phi)$
   - $U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\phi\phi} = 0 \qquad r \in [0,1]\,,\ \phi \in [-\pi,\pi]$
   - $U(r,\phi_-) = U(r,-\phi_+) \qquad \lim\limits_{r\to 0} U(r,\phi) = U(0,\phi) \quad \forall \phi \in [-\pi,\pi]$

   (a) Separation: $U(r,\phi) = V(r) \cdot W(\phi)$

   $$\Rightarrow W(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)$$

   $$\Rightarrow V(r) = r^n$$

   (b) Randbedingungen: $U(1,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi) = F(\phi)$

   $\rightarrow$ Wenn sich F in eine Summe von $\sin(n\phi)$ und $\cos(n\phi)$ schreiben lässt: ermittle a_n und b_n

   $$\Rightarrow U(r,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)] r^n$$

   $\rightarrow$ Rücktransformation in kartesische Koordinaten

3. f ist radialsymmetrisch: Suche radialsymmetrische Lösung
   $V'' + \frac{1}{r}V' = 0$

   $\rightarrow V(r) = \mathit{const} = F \quad$ oder $\quad V(r) = C\ln|r| + d \quad$ wenn $\quad 0 \notin \Omega$